$3^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR 4 EXERCÍCIOS EM 20/03/2003

1. Seja $\mathbb{A}^1$ o espaço anelado $(k, \mathcal{O}_k)$. Um *automorfismo* de $\mathbb{A}^1$ é um isomorfismo de espaços anelados $\varphi\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$. Mostre que todo o automorfismo de $\mathbb{A}^1$ é da forma $z \mapsto az + b$, onde $a \in k^\times$ e $b \in k$.

2. Seja A um anel e $S \subset A$ um conjunto multiplicativo. Denotamos por $S^{-1}A$ a localização de A em S. Recorde que existe um homomorfismo $i\colon A \to S^{-1}A$ dado por $i(a) = \frac{a}{1}$. Mostre que i tem a seguinte propriedade universal: dado um anel B e um homomorfismo $\alpha\colon A \to B$ tal que $\alpha(s)$ é invertível, para todo $s \in S$, existe um único homomorfismo $\beta\colon S^{-1}A \to B$ que faz comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & S^{-1}A \arrow[d, "\beta"] \\ & B \end{tikzcd}$$

3. Seja A um anel. Dado $h \in A$, denotamos a localização de A em h por A_h. Considere o homomorfismo $\psi\colon A[x]/(xh-1) \to A_h$ definido por

$$\psi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{j=1}^{n} i(a_j)\frac{1}{h^j},$$

onde $i\colon A \to A_h$ é o homomorfismo dado por $i(a) = \frac{a}{1}$. Mostre que ψ é um isomorfismo.

4. Mostre que a hipérbole $Y = V(xy-1) \subset k^2$ não é isomorfa a $\mathbb{A}^1$, como variedade afim. (Ou seja, os espaços anelados $(Y, \mathcal{O}_Y)$ e $\mathbb{A}^1$ não são isomorfos.)

5. Sejam $X \subset k^n$ e $Y \subset k^m$ conjuntos algébricos e seja $\varphi\colon X \to Y$ um morfismo de variedades algébricas afins (ou seja, φ é um morfismo $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ de espaços anelados). Mostre que o homomorfismo de álgebras-k $\varphi^*\colon k[Y] \to k[X]$ é injectivo *sse* φ é *dominante*, ou seja, *sse* $\varphi(X)$ é denso em Y.