$4^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 28/03/2003

1. Recorde que um *isomorfismo* de variedades afins é um morfismo $\varphi\colon X \to Y$ tal que φ é um homeomorfismo e φ^{-1} é um morfismo. Mostre que um morfismo de variedades afins que é um homeomorfismo não é necessariamente um isomorfismo.

   Sugestão: considere $x \mapsto (x^2, x^3)\colon \mathbb{A}^1 \to V(y^2 - x^3)$.

2. Seja X a pré-variedade algébrica $\mathbb{A}^n - \{\mathbf{0}\}$, onde $n > 1$. Mostre que

   (a) $k[X] \cong k[x_1, \ldots, x_n]$;

   (b) X não é afim.

3. Sejam $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal, $A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ e $\bar{x}_i$ a imagem de x_i em A. Mostre que a aplicação

   $$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\bar{x}_1 - a_1, \ldots, \bar{x}_n - a_n)$$

   é uma bijecção entre $V(I) \subset k^n$ e $\operatorname{specm}(A)$.

4. Seja $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal radical. Mostre que I é a intersecção de todos os ideais maximais que contêm I.

5. Sejam A, B álgebras afins e $\varphi\colon \operatorname{Specm}(B) \to \operatorname{Specm}(A)$ um morfismo de variedades afins. Mostre que $\operatorname{Specm}(\varphi^*) = \varphi$.