$5^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 04/04/2003

1. Seja $\pi\colon k^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$ a projecção natural. Mostre que

   (a) a topologia de $\mathbb{P}^n$ é a topologia quociente induzida por π. Ou seja, $U \subset \mathbb{P}^n$ é aberto *sse* $\pi^{-1}(U)$ é aberto;

   (b) se $U \subset \mathbb{P}^n$ é um aberto, então $f\colon U \to k$ é regular *sse* $f \circ \pi\colon \pi^{-1}(U) \to k$ é regular.

   Sugestão: Note que $k^{n+1} - \{\mathbf{0}\} = D(x_0) \cup \cdots \cup D(x_n)$ e $D(x_i) = \pi^{-1}(U_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

   Nota: Se X um espaço anelado e $\pi\colon X \to Y$ é uma aplicação sobrejectiva, define-se uma estrutura de espaço anelado em Y – dita a *estrutura quociente* – da forma seguinte: (a) a topologia de Y é a topologia quociente relativamente a π; (b) $f\colon U \to k$ é regular *sse* $f \circ \pi\colon \pi^{-1}(U) \to k$ é regular.

   O exercício mostra que $\mathbb{P}^n$ tem a estrutura quociente relativamente a $\pi\colon k^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^n$.

2. Um polinómio $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ diz-se *homogéneo* de grau $d \in \mathbb{N}$ se todos os seus monómios têm grau d. Dado um conjunto $S \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ de polinómios homogéneos, define-se

   $$\mathbb{V}(S) = \{(z_0 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n \mid f(z_0 : \ldots : z_n) = 0, f \in S\}.$$

   Mostre que os conjuntos da forma $\mathbb{V}(S)$ são precisamente os fechados de $\mathbb{P}^n$.

   Sugestão: Note que $X \subset k^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ é fechado *sse* $X \cup \{\mathbf{0}\}$ é fechado em k^{n+1}.

3. Um ideal $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ diz-se *homogéneo* se é gerado por polinómios homogéneos. É fácil de ver que I é homogéneo *sse* $f \in I \Rightarrow \forall_d\ f_d \in I$, onde f_d são os termos de grau d. Dado um ideal homogéneo I define-se $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(S_I)$, onde S_I é o conjunto dos elementos homogéneos de I. Obtemos assim uma função de ideais homogéneos para subconjuntos de $\mathbb{P}^n$. Dado $X \subset \mathbb{P}^n$ define-se $\mathbb{I}(X) = \mathcal{I}(\pi^{-1}(X) \cup \{\mathbf{0}\})$. Mostre que

   (a) $\mathbb{I}(X)$ é homogéneo;

   (b) as correspondências $\mathbb{V}$ e $\mathbb{I}$ definem uma bijecção entre os fechados não vazios de $\mathbb{P}^n$ e os ideais radicais homogéneos de $k[x_0, \ldots, x_n]$ que não contêm $(x_0, \ldots, x_n)$;

   (c) através das correspondências $\mathbb{V}$ e $\mathbb{I}$, os fechados irredutíveis correspondem aos ideais homogéneos primos.

4. Sejam X, Y pré-variedades algébricas. Mostre que a pré-variedade algébrica $X \times Y$, com a estrutura definida na aula, é um produto na categoria das pré-variedades algébricas.

5. Seja X pré-variedade algébrica. Mostre que X é separada *sse* para toda a pré-variedade algébrica Z e todo o par de morfismos $\varphi, \psi\colon Z \to X$ tal que $\varphi = \psi$ num conjunto denso, se tem $\varphi = \psi$.