$8^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 09/05/03

1. Mostre que as variedades seguintes não são afins nem projectivas:

   (a) $\mathbb{A}^2 - \{\mathbf{0}\}$;

   (b) $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$.

2. Dê um exemplo de um morfismo de variedades afins $f\colon X \to Y$ que seja quase-finito e sobrejectivo mas não finito.

   Sugestão: Uma forma de construir um morfismo quase-finito é considerar um morfismo finito $f\colon V \to W$ e retirar um fechado a V.

3. Seja $f\colon X \to Y$ um morfismo dominante e finito de variedades irredutíveis. Mostre que $\dim X = \dim Y$.

4. Seja $p\colon \mathbb{A}^{n+2} \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ uma projecção linear e seja $\mathbf{a} \in \mathbb{P}^{n+1}$ tal que $\ker p = \mathbf{a}$. Mostre que

   (a) a aplicação $p_{\mathbf{a}}\colon \mathbb{P}^{n+1} - \{\mathbf{a}\} \to \mathbb{P}^n$ induzida por p é um morfismo;

   (b) se $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ é uma subvariedade projectiva irredutível de dimensão n tal $\mathbf{a} \notin X$, então $p_{\mathbf{a}|X}\colon X \to \mathbb{P}^n$ é um morfismo finito.

5. Determine se é válida a versão afim do resultado do problema anterior. Ou seja, determine se, dada uma projecção linear $p\colon \mathbb{A}^{n+1} \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ com $L = \ker p$ e uma variedade-n $X \subset \mathbb{A}^{n+1} - L$, o morfismo $p_{|X}\colon X \to \mathbb{A}^n$ é necessariamente finito.