$9^{\underline{a}}$ Série de problemas de Geometria Algébrica

ENTREGAR EM 25/05/03

1. Mostre o *Nullstellensatz Fraco:* Seja $k \subset K$ uma extensão de corpos tal que K é uma álgebra finitamente gerada sobre k. Então $k \subset K$ é uma extensão finita; ou seja, $\dim_k K < \infty$.

   Sugestão: Use o Teorema de Normalização de Noether.

2. Seja $f\colon X \to Y$ um morfismo finito de pré-variedades algébricas. Mostre que X é separada se Y o for.

3. Seja $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ um morfismo finito. Mostre que $\dim X = \dim Y$.

4. Demonstre a versão geométrica do *Teorema de Normalização de Noether*: Seja $X \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim irredutível de dimensão d. Então existe um morfismo finito $f\colon X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$.

5. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projectiva de dimensão $d < n$. Recorde que existe um variedade projectiva linear $E \subset \mathbb{P}^n$ de dimensão $n - d - 1$ tal que $E \cap X = \varnothing$. Seja $p\colon k^{n+1} \twoheadrightarrow k^{d+1}$ um projecção linear tal que $E = \ker p$. Mostre que

   (a) p induz um morfismo $\pi\colon \mathbb{P}^n - E \to \mathbb{P}^d$;

   (b) $\pi_{|X}\colon X \to \mathbb{P}^d$ é um morfismo finito sobrejectivo.