Notas de Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

Pedro Lopes
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
2o. Semestre 2009/2010

Estas notas constituem um material de apoio ao curso de Cálculo Diferencial e Integral I para as licenciaturas em Engenharia Informática e Computadores, em Engenharia de Redes e Comunicações, em Engenharia Electrónica e em Engenharia e Gestão Industrial do Instituto Superior Técnico no Tagus Park, no 2o. semestre de 2009/2010 e não pretendem ser um substituto dos manuais escolares disponíveis.

1 Introdução

1.1 Motivação do Cálculo Integral em $\mathbb{R}$ e definição de integral

Suponhamos que pretendemos calcular áreas de figuras planas. Por exemplo, como calcular a área de um círculo de raio r ($r > 0$)? Estabeleçamos desde já que as áreas com que trabalharemos aqui serão tipicamente áreas delimitadas por gráficos de funções, pelo eixo dos XX e por rectas verticais - ou outras áreas obtidas á custa de tais áreas. Assim sendo abordemos novamente o cálculo da área do círculo. Escolhendo eixos, este é dado pela expressão $x^2 + y^2 = r^2$. Mas esta não é uma função. Para tal escrevemos y à custa de x obtendo as funções $f_\pm(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Escolhendo a função f_+, a área pretendida é o dobro da área da figura abaixo do gráfico de f e acima do eixo dos XX.

Pretendemos, então, construir um objecto matemático que, dados uma função f, para já positiva e um intervalo $[a, b]$, contido no domínio de f, lhes associa a área delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos XX e pelas rectas de equação $x = a$ e $x = b$.

Exemplo 1.1 *(Elementar)*

Considere-se a função constante $f(x) = c$ ($c > 0$), para todo o x em $[a, b]$ ($a < b$). Qual é a área da figura plana delimitada pelo gráfico desta função f, pelo eixo dos XX e pelas rectas de equação $x = a$ e $x = b$? Claramente essa área é $c(b - a)$ e é isso que o tal objecto matemático nos deve fornecer neste caso particular.

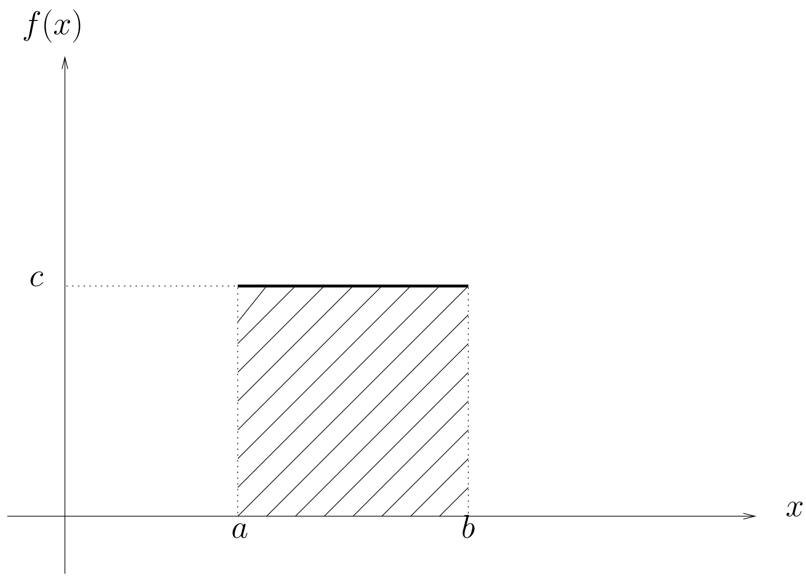

Figure 1: Área delimitada pela função constante, pelo eixo dos XX e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$

E se a função a considerar tiver um gráfico do tipo da função apresentada na figura 2? Inspirando-nos no exemplo (Elementar) acima podemos **estimar** a área pretendida da seguinte maneira. Começamos por tomar uma decomposição, isto é, uma sucessão finita de, digamos, $n + 1$ pontos no intervalo $[a, b]$, ordenados de forma crescente em que $a = x_0$ e o último $x_n = b$. Pretendemos escolher estes pontos de tal maneira que a função f restricta a cada um dos subintervalos formados por pontos consecutivos da sucessão acima mencionada, $[x_{k-1}, x_k]$ se pareça *o mais possível* com uma função constante. Seguidamente consideramos a restrição da função em causa a um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ e tentamos avaliar a contribuição da área abaixo da função f, acima do eixo dos XX e entre as rectas verticais de equação $x = x_{k-1}$ e $x = x_k$ (ver novamente a figura 2). Claramente, essa contribuição é superior a $\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$ (ver figura 3) e inferior a $\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$ (ver figura 4). No que se segue, usaremos a notação $m_k(f)$ para designar $\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, omitindo frequentemente (f) em $m_k(f)$ sempre que seja clara a função f em causa. Analogamente, $M_k(f)$ designará $\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, omitindo-se frequentemente (f) em $M_k(f)$. Assim, somando estas contribuições de todos os subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, obtemos a seguinte estimativa para a "área pretendida":

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \text{ "área pretendida" } \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

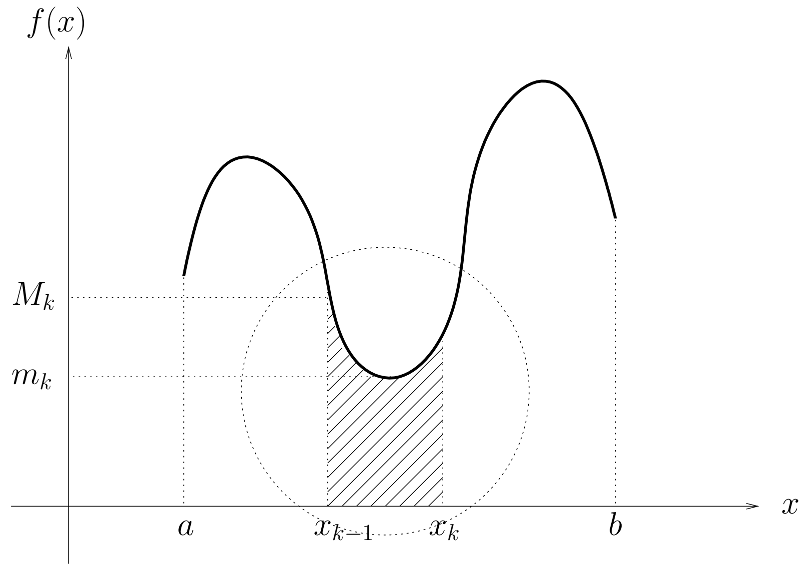

Figure 2: Como calcular a área a tracejado?

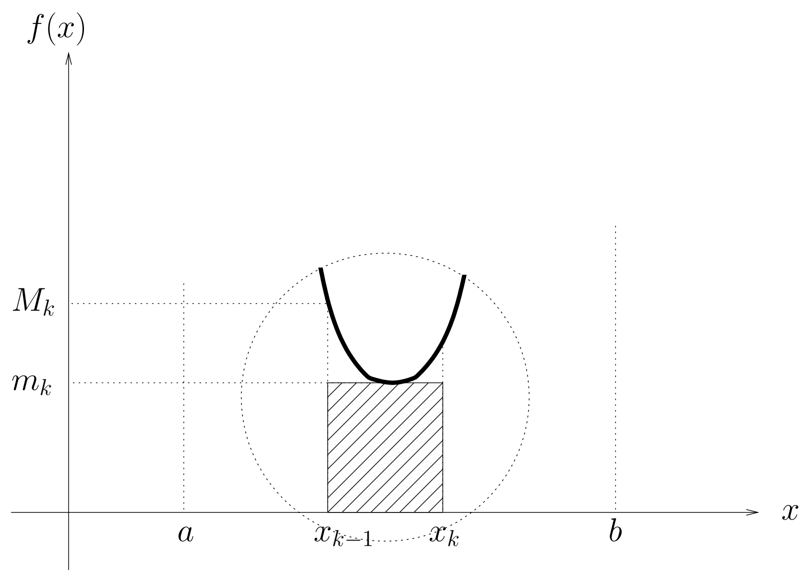

Figure 3: ...estimativa por defeito...

Definição 1.1 *As somas acima designam-se por somas de Darboux de f relativamente à decomposição d em questão:*

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

é a **soma de Darboux inferior de f relativamente a** d*, notação* $s_d(f)$ *e*

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

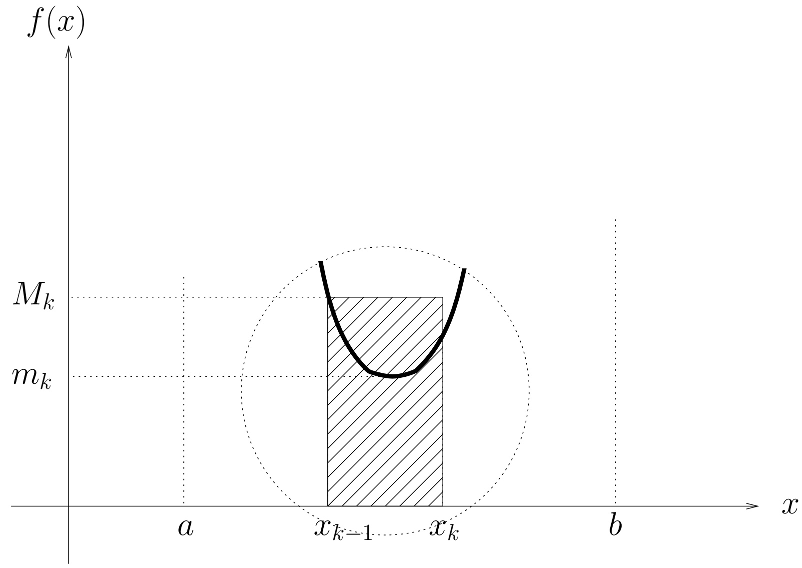

Figure 4: ...estimativa por excesso...

é a **soma de Darboux superior de f relativamente a** *d, notação $S_d(f)$*

Com esta notação obtemos:

$$s_d(f) \leq \text{ “área pretendida” } \leq S_d(f)$$

Observação 1.1 *(“Monotonia” das somas de Darboux) Dada um decomposição d do intervalo $[a, b]$, consideremos uma nova decomposição de $[a, b]$ que é obtida de d por escolha de um novo ponto x'_k entre os pontos x_{k-1} e x_k da decomposição d. Como se relacionam entre si as somas de Darboux de f relativamente a d e a d'? As alterações provêm só do que se passa entre x_{k-1} e x_k. Enquanto que para a decomposição d só há um ínfimo (resp., um supremo) a ser calculado, para a decomposição d' há que considerar o ínfimo (resp., supremo) de f restrita a $[x_{k-1}, x'_k]$ e o ínfimo (resp., supremo) de f restrita a $[x'_k, x_k]$. Notemos aqui que uma decomposição d' obtida de uma decomposição d por adição de pontos se chama refinamento de d; diz-se tambem que d' é mais fina que d.*

Obtemos então:

Proposição 1.1 *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Se d' é uma decomposição mais fina que d de $[a, b]$, então:*

$$s_d(f) \leq s_{d'}(f) \leq S_{d'}(f) \leq S_d(f)$$

Dem. - exercício - ■

Já que o conjunto das somas de Darboux inferiores para todas as decomposições do intervalo $[a, b]$ constituem um conjunto majorado e não vazio (porquê?) então existe o supremo desse conjunto, ao qual chamamos

Definição 1.2 *(Integral inferior de f sobre $[a, b]$) Designa-se por* **Integral inferior de f sobre** *$[a, b]$, notação $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, ao supremo:*

$$\sup_{d \text{ é decomp. de } [a,b]} s_d(f) := \sup\{s_d(f) \mid d \text{ é decomposição de } [a, b]\}$$

Analogamente, designa-se por **Integral superior de f sobre** *$[a, b]$, notação $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, ao ínfimo:*

$$\inf_{d \text{ é decomp. de } [a,b]} S_d(f) := \inf\{S_d(f) \mid d \text{ é decomposição de } [a, b]\}$$

Observamos que

Proposição 1.2 *Para qualquer decomposição d de $[a,b]$,*

$$s_d(f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \text{ “área pretendida ”} \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S_d(f)$$

Dem. - exercício - ■

Suponhamos que $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Então o supremo das aproximações por defeito à “área pretendida” coincide com o ínfimo das aproximações por excesso à área pretendida”, ou seja obtivémos “área pretendida”.

Definição 1.3 *Seja f uma função limitada em $[a,b]$. Se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

então f diz-se **integrável em [a, b]** *e chama-se* **integral de f sobre** $[a,b]$*, notação $\int_a^b f(x)dx$, a esse valor comum dos integrais superiores e inferiores:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Observação 1.2

1. *Este (integral de f sobre $[a,b]$) é o tal objecto matemático que nos dá a “área pretendida”*
2. *Esta é uma maneira bem intuitiva de obter a “área pretendida”*
3. *Note-se, no entanto, a dificuldade em obter a tal “área pretendida” pelo processo indicado:*
   (a) *Há que considerar cada uma de todas as decomposições do intervalo de integração, $[a,b]$ - mas estas são infinitas (ver figura 5 para um exemplo de uma sucessão infinita de decomposições de um intervalo $[a,b]$);*
   (b) *Para cada uma das decomposições d, calcular, para cada um dos subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, o ínfimo e o supremo da função restrita a esse subintervalo;*
   (c) *Calcular as somas de Darboux para cada uma das decomposições obtidos os supremos e ínfimos referidos acima*
   (d) *Calcular o supremo das somas de Darboux inferiores e o ínfimo das somas de Darboux superiores*

...no entanto...

Exemplo 1.2

1. Calcular $\int_a^b f(x)dx$, para a função constante, $f(x) = c$, qualquer que seja x em $[a,b]$, isto é, calcular a área limitada pelo gráfico desta função f, pelo eixo dos XX e pelas rectas de equação $x = a$ e $x = b$.

Tome-se uma decomposição, d de $[a,b]$, com pontos $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$. Como a função é constante (igual a c), então, para qualquer k:

$$m_k = c \qquad \text{e} \qquad M_k = c$$

donde,

$$s_d(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$$

e

$$S_d(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$$

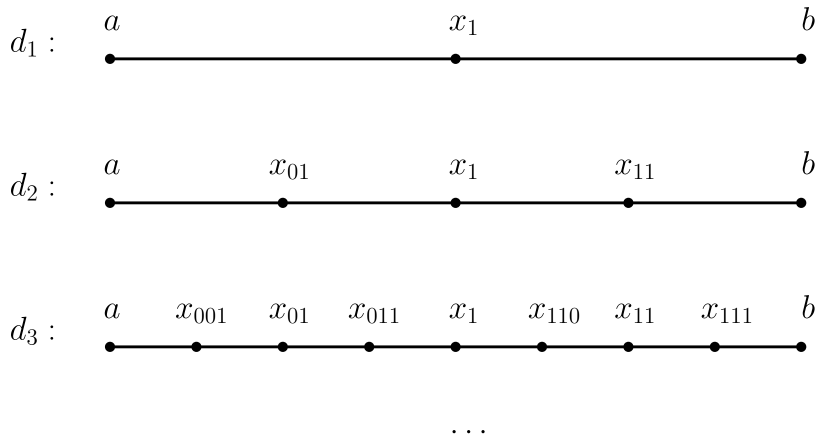

Figure 5: Sucessão infinita $d_1, d_2, d_3, \dots$ de decomposições do intervalo $[a, b]$

e portanto

$$\{s_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] } \} = \{c(b-a)\} = \{S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] } \}$$

logo,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

ou seja

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

o que coincide com a nossa observação inicial.

2. Calcular $\int_a^b f(x)dx$, onde $f(x) = x$, qualquer que seja x em $[a, b]$.

Tome-se uma decomposição de $[a, b]$, com pontos $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$. Porque f é contínua e crescente em $[a, b]$, tem-se

$$m_k = x_{k-1} \qquad ; \qquad M_k = x_k$$

Então,

$$\begin{aligned} s_d(f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + x_{k-1} - x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_{k-1}^2) - S_d(f) = b^2 - a^2 - S_d(f) \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f(x)dx &= \sup\{s_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] } \} = \sup\{b^2 - a^2 - S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] } \} = \\ &= b^2 - a^2 + \sup\{-S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] } \} = \\ &= b^2 - a^2 - \inf\{S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] } \} = b^2 - a^2 - \overline{\int_a^b} f(x)dx \end{aligned}$$

Assumindo que $f(x) = x$ é integrável em $[a, b]$, então os integrais inferiores e superiores são iguais ao integral sobre $[a, b]$ obtendo-se

$$\int_a^b f(x)dx = b^2 - a^2 - \int_a^b f(x)dx$$

donde

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Era este o resultado que se esperava?

3. Seja $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em $[-r, r]$. Calcular as somas de Darboux superiores e inferiores relativamente a uma decomposição d de $[-r, r]$. Será fácil calcular o supremo (resp., o ínfimo) das somas de Darboux inferiores (resp., superiores) sobre todas as decomposições de $[-r, r]$?

4 Seja $f(x) = 1$ para x racional e $f(x) = 0$ para x irracional. Calcular as somas de Darboux superiores e inferiores relativamente a uma decomposição d de um intervalo $[a, b]$. Será f integrável em $[a, b]$?

1.2 Quais são as funções integráveis?

Mostramos de seguida uma classe de tais funções depois de um resultado técnico importante:

Proposição 1.3 *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. f é integrável em $[a, b]$ é equivalente a dizer que para todo o $\epsilon > 0$, existe uma decomposição d de $[a, b]$ tal que $S_d(f) - s_d(f) < \epsilon$.*

Dem. Tome $\epsilon > 0$. Como f é integrável em $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] }\}.$$

Então existe uma decomposição d_1 de $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < s_{d_1}(f)$$

Analogamente, porque

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] }\}.$$

existe uma decomposição d_2 de $[a, b]$ tal que

$$S_{d_2}(f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Sendo d um refinamento comum de d_1 e d_2, tem-se, reescrevendo

$$S_d(f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

$$-s_d(f) < -\int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

donde

$$S_d(f) - s_d(f) < \epsilon$$

provando assim que se f é integrável em $[a, b]$ então, dado $\epsilon > 0$, existe uma decomposição d de $[a, b]$ tal que $S_d(f) - s_d(f) < \epsilon$.

Provemos agora a recíproca. Suponha então que para todo o $\epsilon > 0$, existe uma decomposição d de $[a, b]$ tal que $S_d(f) - s_d(f) < \epsilon$. Como

$$s_d(f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S_d(f)$$

então,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq S_d(f) - s_d(f) < \epsilon$$

donde, necessariamente,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

ou seja f é integrável em $[a,b]$. ■

Esta proposição dá-nos uma condição de integrabilidade que é mais fácil de usar - e que vamos usar já de seguida.

Proposição 1.4 *Seja f contínua em $[a,b]$. Então f é integrável em $[a,b]$.*

Dem. Tome $\epsilon > 0$. Sendo f contínua em $[a,b]$ então f é uniformemente contínua em $[a,b]$. Existe, então $\delta > 0$ tal que quaisquer que sejam x e x' de $[a,b]$ com $|x-x'| < \delta$, $|f(x)-f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Seja d uma decomposição de $[a,b]$ com pontos $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ tal que para todo o k se tenha $|x_k - x_{k-1}| < \delta$. Como f é contínua em $[a,b]$, então $M_k = f(\xi_k)$ para certo ξ_k em $[x_{k-1}, x_k]$ e $m_k = f(\eta_k)$ para certo η_k em $[x_{k-1}, x_k]$, para cada k. Então

$$\begin{aligned} S_d(f) - s_d(f) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k) - f(\eta_k))(x_k - x_{k-1}) < \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe decomposição d de $[a,b]$ tal que $S_d(f) - s_d(f) < \epsilon$, donde f é integrável em $[a,b]$, pela proposição anterior. ■

1.3 Uma fórmula para calcular o integral de certas funções

Na secção anterior conseguimos caracterizar uma classe de funções integráveis. Fica no entanto a dúvida seguinte. Será que para calcular o integral dessas funções há que seguir a definição de integrabilidade?

Como noutros contextos da matemática, as definições seguem a nossa ideia intuitiva de um determinado objecto. No caso presente, definimos integral seguindo a nossa intuição de como aproximar a área a calcular. O que acontece muitas vezes, e o caso presente é mais um exemplo disso, é que na prática usar as definições é muito complicado. Em certos casos particulares, demonstra-se que a definição pode ser substituída por *algo* mais simples. No caso presente, vamos ver que para toda a função integrável f sobre um intervalo $[a,b]$, para a qual exista uma outra função F tal que $F'(x) = f(x)$ em $[a,b]$, o integral $\int_a^b f(x)dx$ é dado por $F(b) - F(a)$. Estes resultados, que são demonstráveis, são conhecidos por Teoremas (e tambem Proposições, Lemas, etc. consoante o contexto e a sua importância relativa).

Teorema 1.1 (Regra de Barrow) *Seja f integrável em $[a,b]$. Seja F uma função tal que $F'(x) = f(x)$ para todo o x em $[a,b]$. Então:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dem. Seja d uma decomposição de $[a,b]$ com pontos $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$. Para cada k, vamos aplicar o Teorema de Lagrange a F e ao intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Tem-se, então,

$$\frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = F'\xi_k) = f(\xi_k)$$

para certo ξ_k em $]x_{k-1}, x_k[$, para cada k. Reescrevendo,

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

e como $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$, para cada k, tem-se

$$s_d(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = S_d(f)$$

donde

$$s_d(f) \leq \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) \leq S_d(f)$$

e portanto

$$s_d(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_d(f)$$

Como $F(b) - F(a)$ não depende da decomposição em questão, então esse valor é um majorante das somas de Darboux por defeito e um minorante das somas de Darboux por excesso; em particular,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Finalmente, como f é integrável em $[a, b]$, então

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

donde as desigualdades anteriores passam a igualdades, e portanto

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

■

De qualquer maneira este Teorema não é milagroso! Dada uma função integrável f, há que perceber se existe função F cuja derivada seja f - essa F designa-se por **primitiva de** f. Pode não existir tal F ou talvez não nas formas em que estamos habituados a abordar funções. De qualquer maneira existem técnicas que nos permitem calcular essas funções numa grande variedade de casos. O estudo dessas técnicas e sua aplicação vai ser o nosso próximo tópico.

1.4 Técnicas de Primitivação

Proposição 1.5 *Seja F_0 uma primitiva de f em $]a, b[$. Então qualquer outra primitiva de f em $]a, b[$ tem a forma $F(x) = F_0(x) + c$, para todo o x em $]a, b[$ (e onde c é uma constante).*

Observação 1.3 *Sucintamente, duas primitivas de uma função num intervalo diferem por uma constante.*

Dem. Sejam F_0, F e f como no enunciado. Seja $G(x) = F(x) - F_0(x)$, para todo o x em $]a, b[$. Como F_0 e F são ambas primitivas de f em $]a, b[$:

$$G'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

para todo o x em $]a, b[$. Fixe um ponto a_0 em $]a, b[$ e seja x um ponto qualquer de $]a, b[\backslash\{a_0\}$. Aplicando o Teorema de Lagrange a G no intervalo de extremos a_0 e x tem-se, para certo ξ no interior desse intervalo,

$$\frac{G(a_0) - G(x_0)}{a_0 - x_0} = G'(\xi) = 0$$

donde

$$G(x) = G(a_0)$$

isto é, a função G assume sempre o mesmo valor, isto é G é uma função constante, $G(x) = c$ para todo o x em $]a, b[$. Dada a definição da função G concluímos que

$$F(x) - F_0(x) = c$$

para todo o x pertencente a $]a,b[$. $\blacksquare$

Dada uma função através de uma expressão $f(x)$, primitivar $f(x)$ é de uma certa forma, adivinhar a expressão da função cuja derivada é $f(x)$.

Exemplo 1.3

Sendo a uma constante real, de

$$(ax)' = a$$

vem que

$$Pa = ax + c$$

onde c é uma constante. Sendo $\alpha \neq -1$, de

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$$

vem

$$Px^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Para $\alpha = -1$ temos

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

donde

$$P\frac{1}{x} = \log|x| + c$$

Um exemplo de aplicação da segunda fórmula acima:

$$P\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = Px^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{-\frac{2}{3}+1}x^{\overline{-\frac{2}{3}+1}^{\,1}} + c = 3\sqrt[3]{x^2} + c$$

Proposição 1.6 (Linearidade da Primitivação) *Suponha que $F'(x) = f(x)$e $G'(x) = g(x)$ num certo intervalo $]a,b[$ e que a e b são constantes reais. Então*

$$P\Big(af(x) + bg(x)\Big) = aPf(x) + bPg(x)$$

para todo o x em $]a,b[$.

Dem. Tem-se

$$\Big(aF(x) + bG(x)\Big)' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x)$$

donde

$$P\Big(af(x) + bg(x)\Big) = P\Big(aF(x) + bG(x)\Big)' = aF(x) + bG(x) + c = aPf(x) + bPg(x)$$

$\blacksquare$

Exemplo 1.4

$$P\Big(1 + 3x + x^2\Big) = P1 + 3Px + Px^2 = x + 3\frac{1}{1+1}x^{1+1} + \frac{1}{2+1}x^{2+1} = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + c$$

1.4.1 Primitivas Imediatas

De seguida apresentamos uma lista das chamadas **Primitivas Imediatas**. Seja u uma função diferenciável num intervalo $]a,b[$.

- $Pu'u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$
- $P\frac{u'}{u} = \log|u| + c$
- $Pu'e^u = e^u + c$
- $Pu'\sin(u) = -\cos(u) + c$
- $Pu'\cos(u) = \sin(u) + c$
- $P\dfrac{u'}{1+u^2} = \arctan(u) + c$
- $P\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) + c$
- $P\dfrac{u'}{\sqrt{u^2+1}} = argsh(u) + c = \log\Big(u + \sqrt{u^2+1}\Big) + c$
- $P\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}} = \log\Big(u + \sqrt{u^2-1}\Big) + c$, para $|u| > 1$
- $Pu'\sec^2 u = \tan(u) + c$
- $Pu'\csc^2(u) = -\cot(u) + c$
- $Pu'\sec(u)\tan(u) = \sec(u) + c$
- $Pu'\csc(u)\cot(u) = -\csc(u) + c$

Basta derivar o segundo membro das expressões acima para se constatar a validade destas primitivas.

Exemplo 1.5

$$Px(x^2+1)^{999} = \frac{1}{2}P2x(x^2+1)^{999} = \frac{1}{2}\frac{1}{999+1}(x^2+1)^{999+1} + c = \frac{1}{2000}(x^2+1)^{1000} + c$$

$$P\frac{x^2}{x^3+5} = \frac{1}{3}P\frac{3x^2}{x^3+5} = \frac{1}{3}\log|x^3+5| + c$$

$$Pxe^{x^2} = \frac{1}{2}P2xe^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$P\frac{1}{1+4x^2} = P\frac{1}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}P\frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\arctan(2x) + c$$

$$P\frac{x}{1+4x^2} = \frac{1}{8}P\frac{8x}{1+4x^2} = \frac{1}{8}\log(1+4x^2) + c$$

$$P\tan(x) = P\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = P\frac{-(\cos(x))'}{\cos(x)} = -P\frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} = -\log|\cos(x)| + c = \log|\sec(x)| + c$$

$$P\cot(x) = \cdots = \log|\sin(x)| + c$$

$$P\frac{\log(x)}{x} = P(\log(x))'\log(x) = \frac{1}{1+1}\log^{1+1}(x) + c = \frac{1}{2}\log^2(x) + c$$

$$P\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = P\sqrt{\frac{(1+x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}} = P\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = P\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + P\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \arcsin(x) + \frac{1}{-2}P(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \arcsin(x) - \frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1} + c =$$
$$= \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + c$$

$$P\sec(x) = P\sec(x)\frac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)} = P\frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)} = \log|\sec(x)+\tan(x)| + c$$

$$P\csc(x) = P\csc(x)\frac{\csc(x)+\cot(x)}{\csc(x)+\cot(x)} = \cdots = -\log|\csc(x)+\cot(x)| + c$$

$$P\sin(x)\cos(x) = P\frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}P2\sin(2x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + c$$

ou

$$P\sin(x)\cos(x) = P(-\cos(x))'\cos(x) = -\frac{1}{1+1}\cos^2(x) + c = \frac{1}{2}\cos^2(x) + c$$

$$P\sin^2(x) = P\frac{1-\cos(2x)}{2} = P\frac{1}{2} - P\frac{\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}P2\cos(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

$$P\sin^3(x) = P\sin(x)\sin^2(x) = P\sin(x)(1-\cos^2(x)) = P\sin(x) - P\sin(x)\cos^2(x) =$$
$$= -\cos(x) + P(\cos(x))'\cos^2(x) = -\cos(x) + \frac{1}{2+1}\cos^{2+1}(x) + c = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + c$$

$$P\sin^4(x) = P\sin^2(x)\sin^2(x) = P\sin^2(x)(1-\cos^2(x)) = P\sin^2(x) - P(\sin(x)\cos(x))^2 =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - P\frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}\frac{1}{2}P2\sin^2(x) =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}2x - \frac{1}{4}\sin(2\cdot 2x)\right) + c$$

$$P\tan^2(x) = P(\sec^2(x)-1) = \tan(x) - x + c$$

$$P\tan^{n+1}(x) = P\tan^2(x)\tan^{n-1}(x) = P(\sec^2(x)-1)\tan^{n-1}(x) = P\sec^2(x)\tan^{n-1}(x) - P\tan^{n-1}(x) =$$
$$= \frac{1}{n}\tan^n(x) - P\tan^{n-1}(x)$$

donde

$$P\tan^{n+1}(x) = \frac{1}{n}\tan^n(x) - P\tan^{n-1}(x)$$

1.4.2 Primitivação por partes

A regra da primitivação por partes é uma consequência da regra da derivada do produto de duas funções. Relembrando, dadas duas funções diferenciáveis u e v, tem-se:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

que reescrevendo dá

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Então,

$$P(uv') = P\Big((uv)' - u'v\Big) = P\Big((uv)'\Big) - P(u'v) = uv - P(u'v)$$

A fórmula da primitivação por partes é então:

$$P(uv') = uv - P(u'v)$$

Para que serve esta fórmula?

Suponha que tem uma função para primitivar e já viu que a primitiva não é imediata. Se a função a primitivar tiver a forma de um produto onde um dos factores é a derivada de uma função conhecida, então a fórmula acima pode ajudar - ou não!

Exemplo 1.6

$$Pxe^x \qquad \text{faça-se } u(x) = x, v'(x) = e^x, \text{ donde } v(x) = e^x$$

então, aplicando a fórmula da primitivação por partes

$$Pxe^x = xe^x - P(x)'e^x = xe^x - Pe^x = xe^x - e^x + c$$

Note-se que se se tivesse feito

$$u(x) = e^x, v'(x) = x, \text{ donde } v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

obter-se-ia, por aplicação da mesma fórmula

$$Pxe^x = Pe^x x = e^x \frac{1}{2}x^2 - Pe^x \cdot \frac{1}{2}x^2$$

ou seja passámos de ter que primitivar polinómio de 1o. grau em x multiplicado por e^x para ter que primitivar polinómio de 2o. grau em x multiplicado por e^x. A situação piorou decladaramente.

Exemplo 1.7

$$P\log(x) \qquad \text{faça-se } u(x) = \log(x), v'(x) = 1, \text{ donde } v(x) = x$$

Obtem-se,

$$P\log(x) = P\log(x) \cdot 1 = \log(x) \cdot x - P(\log(x))'x = x\log(x) - P\frac{1}{x}x = x\log(x) - P1 = x\log(x) - x + c$$

Observação 1.4

Este truque de encarar $u' \equiv 1$ é usado tambem na primitivação de arcsin e arctan.

Exemplo 1.8

$$\begin{aligned} P\log^n(x) &= P\log^n(x) \cdot 1 = \log^n(x) \cdot x - P(\log^n(x))' \cdot x = x\log^n(x) - Pn\log^{n-1}(x)\frac{1}{x} \cdot x = \\ &= x\log^n(x) - nP\log^{n-1}(x) \end{aligned}$$

isto é

$$P\log^n(x) = x\log^n(x) - nP\log^{n-1}(x)$$

$$P\sin(x) \cdot e^x \qquad \text{faça-se } u(x) = \sin(x), v'(x) = e^x, \text{ donde } v(x)e^x$$

Obtem-se,

$$P\sin(x)e^x = \sin(x)e^x - P(\sin(x))'e^x = \sin(x)e^x - P\cos(x)e^x$$

Aparentemente, continuamos com uma primitiva da mesma complexidade que a primitiva original. No entanto, em

$$P\cos(x)e^x \qquad \text{faça-se } u(x) = \cos(x), v'(x) = e^x, \text{ donde } v(x)e^x$$

obtendo-se

$$P\cos(x)e^x = \cos(x)e^x - P(\cos(x))'e^x = \cos(x)e^x + P\sin(x)e^x$$

e substituindo acima vem

$$\begin{aligned} P\sin(x)e^x &= \sin(x)e^x - P\cos(x)e^x = \sin(x)e^x - \Big(\cos(x)e^x + P\sin(x)e^x\Big) = \\ &= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - P\sin(x)e^x \end{aligned}$$

e salientando só o que interessa

$$P\sin(x)e^x = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - P\sin(x)e^x$$

donde

$$2P\sin(x)e^x = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x$$

e finalmente

$$P\sin(x)e^x = \frac{1}{2}\Big(\sin(x)e^x - \cos(x)e^x\Big) + c$$

Com uma abordagem analoga obtem-se

$$P\cos(x)e^x = \frac{1}{2}\Big(\sin(x)e^x + \cos(x)e^x\Big) + c$$

Mais exemplos,

$$P\sin^n(x) = P\sin^{n-1}(x)\sin(x) \qquad \text{faça-se } u(x) = \sin^{n-1}(x), v'(x) = \sin(x), \text{ donde } v(x) = -\cos(x)$$

Obtem-se

$$\begin{aligned} P\sin^n(x) &= P\sin^{n-1}(x)\sin(x) = \sin^{n-1}(x)(-\cos(x)) - P(\sin^{n-1}(x))'(-\cos(x)) = \\ &= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + P(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\cdot\cos(x) \end{aligned}$$

donde

$$P\sin^n(x) = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}P\sin^{n-2}(x)$$

Exercício: calcular fórmulas de recorrência para

$$P\csc^n(x), \qquad P\cos^n(x) \qquad \text{e} \qquad P\sec^n(x)$$

1.4.3 Primitivação por substituição

A primitivação por substituição é uma consequência da derivada da função composta.

Considere-se a seguinte situação:

Queremos conhecer $F(x)$, primitiva de

$$\begin{aligned} f \ &: \ I \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: \ x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

e conheço $G(t)$, primitiva de $f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$, onde

$$\begin{aligned} \gamma \ &: \ J \longrightarrow I \\ &: \ t \longmapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

é uma bijecção diferenciável do intervalo I sobre o intervalo J. Então,

$$\Big(F(\gamma(t))\Big)' = F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t) = G'(t)$$

donde $F(\gamma(t))$ e $G(t)$ diferem por uma constante, isto é,

$$F(\gamma(t)) = G(t) + c_1$$

donde

$$F(\gamma(\gamma^{-1}(x))) = G(\gamma^{-1}(x)) + c_2$$

ou seja

$$F(x) = G(\gamma^{-1}(x)) + c_2$$

já que γ é uma bijecção.

Na prática, sugere-se o uso da chamada notação de Leibnitz, quando se calculam primitivas por substituição:

$$P_x f(x) = \int f(x)dx \text{ (notação de Leibnitz) } = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt \quad \text{(onde } x(t) = \gamma(t) \quad \text{acima)} =$$
$$= G(t) + c = G(\gamma^{-1}(x)) + c$$

O uso da notação de Leibnitz é conveniente se recordarmos que ao fazer primitivação por substituição tudo o que está expresso na variável antiga tem de passar a estar expresso na variável nova. Tendo presente que na notação de Leibnitz figura dx, isso ajudará a recordar que há que fazer a substituição de dx por $\frac{dx}{dt}dt$, que é frequentemente esquecida.

Exemplo 1.9

$$P\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left(x = t^2, \frac{dx}{dt} = 2t\right)\int \frac{\sin(t)}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int \sin(t)\,dt = -2\cos(t) + c =$$
$$= -2\cos(\sqrt{x}) + c$$

$$P\frac{1}{x\log(x)} = \int \frac{1}{x\log(x)}dx = \left(t = \log(x), x = e^t \frac{dx}{dt} = e^t\right)\int \frac{1}{e^t\cdot t}e^t\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt =$$
$$= \log|t| + c = \log|\log|x|| + c$$

Outros exemplos (a é uma constante)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad \Big(\text{ fazer } x = a\sin(t)\ldots\Big)$$
$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx \quad \Big(\text{ fazer } x = a\tan(t)\ldots\Big)$$
$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx \quad \Big(\text{ fazer } x = a\sec(t)\ldots\Big)$$

A finalizar esta secção chamamos à atenção de que, à semelhança da primitivação por partes, a primitivação por substituição é um método alternativo para a tentativa de cálculo de uma primitiva uma vez que se tenha verificado que essa primitiva não é imediata.

1.4.4 Primitivação de funções racionais

Uma função racional é um quociente de polinómios.

Exemplo 1.10

$$R_1(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 3}{3x^2 - x + \pi}, \qquad R_2(x) = \frac{9x^2 + 5x - 8}{x^5 + 100}$$

Dados polinómios $A(x)$ e $P(x)$, considere a função racional $\frac{A(x)}{P(x)}$. A fracção diz-se imprópria quando o grau do polinómio A é maior ou igual ao grau do polinómio P. A fracção diz-se própria quando o grau do polinómio A é menor que o grau do polinómio P. Nos exemplos acima R_1 é fracção imprópria, enquanto que R_2 é fracção própria. Mas dada qualquer fracção imprópria $\frac{A(x)}{P(x)}$, existem polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $A(x) = P(x)Q(x) + R(x)$ em que grau de $R(x)$ é menor que grau de $P(x)$. Então

$$\frac{A(x)}{P(x)} = \frac{P(x)Q(x) + R(x)}{P(x)} = Q(x) + \frac{P(x)}{R(x)}$$

Assim
$$\frac{A(x)}{P(x)} = Q(x) + \frac{P(x)}{R(x)}$$
Note-se que $\mathbf{P}Q(x)$ é uma soma de primitivas imediatas já que $Q(x)$ é um polinómio. Por outro lado $\frac{P(x)}{R(x)}$ é uma fracção própria.

Exemplo 1.11

$$P\frac{x^2-1}{x^2+1} = P\frac{x^2+1-2}{x^2+1} = P\Big(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\Big) = P\frac{x^2+1}{x^2+1} - 2P\frac{1}{x^2+1} = P1 - 2P\frac{1}{1+x^2} =$$
$$= x - \arctan(x) + c$$

De seguida vamo-nos concentrar em como primitivar funções racionais que são fracções próprias. Seja então $\frac{R(x)}{P(x)}$ uma fracção própria.

1.o Caso: $P(x)$ só tem raízes reais:

Exemplo 1.12

$P(x)$ tem raízes simples 1, -1 e 2, raiz dupla -3 e raiz quadrupla 5, donde

$P(x) = k(x-1)\cdot(x-(-1))\cdot(x-2)\cdot(x-(-3))^2\cdot(x-5)^4 = k(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)^2\cdot(x-5)^4$

onde k é uma constante. Então, por um Teorema da Álgebra

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{R(x)}{k(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)^2\cdot(x-5)^4} =$$
$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D_2}{(x+3)^2} + \frac{D_1}{x+3} + \frac{E_4}{(x-5)^4} + \frac{E_3}{(x-5)^3} + \frac{E_2}{(x-5)^2} + \frac{E_1}{x-5}$$

onde A, B, C, D_2, D_1, E_4, E_3, E_2, E_1 são constantes a determinar. Conseguimos assim reescrever a fracção própria à custa de funções imediatamente primitiváveis, só faltando determinar os coeficientes constantes.

Exemplo 1.13

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1}$$

Vamos usar o **método dos coeficientes indeterminados** para calcular as constantes. Reescrevemos o lado direito da expressão acima de modo a ficar na forma de uma fracção com denominador $x(x-1^2)$:

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} = \frac{A(x-1)^2 + B_2x + B_1x(x-1)}{x(x-1)^2}$$

donde

$x^2+1 = A(x-1)^2+B_2x+B_1x(x-1) = A(x^2-2x+1)+B_2x+B_1(x^2-x) = x^2(A+B_1)+x(-2A+B_2-B_1)+A$

obtendo-se o sistema de três equações a três incognitas:

$$\begin{cases} 1 = A + B_1 \\ 0 = -2A + B_2 - B_1 \\ 1 = A \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} A = 1 \\ B_1 = 0 \\ B_2 = 2 \end{cases}$$

donde

$$P\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = P\Big(\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{0}{x-1}\Big) = \log|x| + 2\frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1} + c = \log|x| - \frac{2}{x-1} + c$$

Exemplo 1.14

$$\frac{x^2-3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Vamos desta vez usar o **método do anulamento** para calcular as constantes. Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $x-1$ obtem-se

$$(x-1)\frac{x^2-3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = (x-1)\frac{A}{x-1} + (x-1)\frac{B}{x+1} + (x-1)\frac{C}{x-2}$$

isto é

$$\frac{x^2-3}{(x+1)(x-2)} = A + (x-1)\frac{B}{x+1} + (x-1)\frac{C}{x-2}$$

e finalmente calculando para $x=1$ vem

$$A = \frac{x^2-3}{(x+1)(x-2)}\Bigg|_{x=1} = \frac{1^2-3}{(1+1)(1-2)} = \frac{1-3}{(2)(-1)} = 1$$

Fica claro, então que para se calcular B há que multiplicar ambos os membros da expressão inicial por $x+1$, simplificar e finalmente calcular a expressão assim obtida para $x=-1$, obtendo-se:

$$B = \frac{x^2-3}{(x-1)(x-2)}\Bigg|_{x=-1} = \frac{(-1)^2-3}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{-2}{(-2)(-3)} = -\frac{1}{3}$$

Sem mais comentários

$$C = \frac{x^2-3}{(x-1)(x+1)}\Bigg|_{x=2} = \frac{4-3}{(1)(3)} = \frac{1}{3}$$

Então

$$\begin{aligned} P\frac{x^2-3}{(x-1)(x+1)(x-2)} &= P\Big(\frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2}\Big) = P\frac{1}{x-1} + P\frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + P\frac{\frac{1}{3}}{x-2} = \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\log|x-2| + c = \\ &= \log|x-1| - \log|\sqrt[3]{x+1}| + \log|\sqrt[3]{x-2}| + c = \log\left|(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}\right| + c \end{aligned}$$

Note-se que, neste caso as raízes em questão são reais e simples - é neste caso que o método do anulamento funciona melhor.

Tentemos calcular as constantes do caso anterior pelo método do anulamento

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1}$$

A constante A obtem-se multiplicando ambos os membros por x, simplificando e calculando essa expressão simplificada pra $x = 0$:

$$A = \left.\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\right|_{x=0} = \frac{0^2+1}{(0-1)^2} = 1$$

A constante B_2 obtem-se tambem multiplicando ambos os membros por $(x-1)^2$, simplificando e calculando em $x = 1$:

$$B_2 = \left.\frac{x^2+1}{x}\right|_{x=1} = \frac{1^2+1}{1} = 2$$

No entanto, a mesma abordagem não permite calcular B_1 (porquê?). Entretanto já sabemos que:

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1}$$

Só nos falta arranjar uma equação que envolva B_1. Para obter uma tal equação basta-nos calcular a igualdade acima para um valor particular de x - e de preferência que não complique os cálculos. Por exemplo $x = -1$. Tem-se então:

$$\left.\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\right|_{x=-1} = \left.\frac{1}{x}\right|_{x=-1} + \left.\frac{2}{(x-1)^2}\right|_{x=-1} + \left.\frac{B_1}{x-1}\right|_{x=-1}$$

donde

$$\frac{(-1)^2+1}{(-1)(-1-1)^2} = \frac{1}{-1} + \frac{2}{(-1-1)^2} + \frac{B_1}{-1-1}$$

isto é,

$$-\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{-2}$$

donde sai

$$B_1 = 0$$

2o. Caso: $P(x)$ tem raízes imaginárias

Se $P(x)$ tem raíz $p + iq$ então tambem tem raíz $p - iq$ e $P(x)$ é divisível por

$$\Big(x - (p+iq)\Big)\Big(x - (p-iq)\Big) = (x-p)^2 + q^2$$

Se $p + iq$ tem multiplicidade m então $p - iq$ tambem tem multiplicidade m e então $P(x)$ é divisível por

$$\Big(x - (p+iq)\Big)^m\Big(x - (p-iq)\Big)^m = \Big((x-p)^2 + q^2\Big)^m$$

Então a fracção própria $\frac{R(x)}{P(x)}$ reescreve-se

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \cdots + \frac{M_m x + N_m}{\Big((x-p)^2+q^2\Big)^m} + \frac{M_{m-1}x + N_{m-1}}{\Big((x-p)^2+q^2\Big)^{m-1}} + \cdots + \frac{M_2 x + N_2}{\Big((x-p)^2+q^2\Big)^2} + \frac{M_1 x + N_1}{(x-p)^2+q^2}$$

Exemplo 1.15

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = \frac{3x^2+2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}\Big(= \frac{3x^2+2x-2}{(x-1)((x-(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)}\Big) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados para calcular as constantes,

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)}{x^3-1}$$

donde

$$3x^2+2x-2 = Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C = x^2(A+B)+x(A-B+C)+(A-C)$$

e portanto

$$\begin{cases} 3 = A+B \\ 2 = A-B+C \\ -2 = A-C \end{cases}$$

cuja solução é

$$A=1 \qquad B=2 \qquad C=3$$

usando por exemplo a regra de Cramer. Pelo método do anulamento conseguimos obter A

$$A = \left.\frac{3x^2+2x-2}{x^2+x+1}\right|_{x=1} = \frac{3+2-2}{1^2+1+1} = \frac{3}{3} = 1$$

E para calcular B, agora que já sabemos que $A=1$? Multiplicamos ambos os membros por x e tomamos limite quando $x\mapsto\infty$,

$$\lim_{x\mapsto\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = \lim_{x\mapsto\infty}\frac{x}{x-1} + \lim_{x\mapsto\infty}\frac{Bx^2}{x^2+x+1} + \lim_{x\mapsto\infty}\frac{Cx}{x^2+x+1}$$

isto é,

$$3 = 1+B+0$$

donde $B=2$. Finalmente, para calcular C voltamos à igualdade inicial e calculamo-la para $x=0$:

$$\left.\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{x-1}\right|_{x=0} + \left.\frac{2x+C}{x^2+x+1}\right|_{x=0}$$

isto é,

$$\frac{-2}{-1} = \frac{1}{-1} + \frac{C}{1}$$

donde

$$C=3$$

Então

$$P\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = P\frac{1}{x-1} + P\frac{2x+3}{x^2+x+1} = \log|x-1| + P\frac{2x+3}{x^2+x+1}$$

Em particular,

$$P\frac{2x+3}{x^2+x+1} = P\frac{(2x+1)+2}{x^2+x+1} = P\frac{2x+1}{x^2+x+1} + P\frac{2}{x^2+x+1} = \log(x^2+x+1) + P\frac{2}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

$$= \log(x^2+x+1) + \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}P\frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2} = \log(x^2+x+1) + \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}P\frac{\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2} =$$

$$= \log(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + c$$

1.4.5 Métodos avançados de primitivação

Suponha que $f(x)$ é uma função racional de $e^{\alpha x}$, onde α é uma constante real.

Exemplo 1.16

$$f(x) = \frac{e^{4x} - e^{2x}}{e^{2x} + 1} = R(e^{2x})$$

Se nos for pedido para calcular uma primitiva de uma tal função, a abordagem pertinente será muito provavelmente primitivação por substituição, fazendo

$$e^{\alpha x} = t \qquad \text{donde} \qquad x = \frac{1}{\alpha}\log(t) \qquad \text{e} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha t}$$

Então, por exemplo,

$$P\frac{e^{4x} - e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \int \frac{e^{4x} - e^{2x}}{e^{2x} + 1}dx = \int \frac{(e^{2x})^2 - e^{2x}}{e^{2x} + 1}dx = \left(t = e^{2x}, x = \frac{1}{2}\log(t), \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t}\right) \int \frac{t(t-1)}{t+1}\frac{dt}{2t} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{t+1-2}{t+1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \int \frac{1}{t+1}dt = \frac{1}{2}t - \log|t+1| + c = \frac{1}{2}e^{2x} - \log(e^{2x}+1) + c$$

Considere agora uma função racional em x e $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Exemplo 1.17

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\frac{2x+1}{3x+5}} + x^2 + x^4\sqrt[3]{\frac{2x+1}{3x+5}}}{x + \left(\sqrt[3]{\frac{2x+1}{3x+5}}\right)2}$$

Primitivação por substituição, fazendo

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad \text{donde} \qquad x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \qquad \text{donde} \qquad \frac{dx}{dt} = \text{ função racional em } t$$

Calcular

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx$$

Funções racionais em $\sin(x)$ e $\cos(x)$

Exemplo 1.18

$$f(x) = \frac{\sin^5(x) + 3\sin^3(x)\cos^3(x) - 2\sin(x)}{\cos^7(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)}$$

Primitivação por substituição, notando que

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{\frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{\frac{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

Analogamente

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cdots = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

Escrevendo $\sin(x)$ e $\cos(x)$ à custa de $\tan(\frac{x}{2})$, as funções racionais em $\sin(x)$ e $\cos(x)$ passam a ser funções racionais em $\tan(\frac{x}{2})$. Assim interessa aqui primitivar por substituição, fazendo

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \qquad x = 2\arctan t, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

Funções racionais em x e $\sqrt{x^2 + \beta x + \gamma}$ ou em x e em $\sqrt{-(x^2 + \beta x + \gamma)}$

Exemplo 1.19

$$f(x) = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2+1}}{x^4(\sqrt{x^2+1})^3 - x^5}$$

Como

$$x^2 + \beta x + \gamma = (x + \frac{\beta}{2})^2 \pm \alpha^2$$

Primitivar por substituição fazendo

$$u = x + \frac{\beta}{2}, \qquad \frac{du}{dx} = 1$$

e seguidamente fazer

$$u = \alpha\tan(t), \qquad \text{ou} \qquad u = \alpha\sec(t), \qquad \text{ou} \qquad u = \alpha\sin(t)$$

conforme o caso.

Observação 1.5

O estudo de técnicas de primitivação que aqui encerramos compreendeu quatro grandes tópicos:

- Primitivas imediatas
- Primitivas de funções racionais
- Primitivação por partes
- Primitivação por substituição

As primitivas imediatas são os "elementos básicos" das técnicas de primitivação. As funções racionais formam uma classe interessante de funções já que dada uma tal função existe sempre a sua primitiva e há tecnicas muitas claras e definidas para calcular essa primitiva, como vimos. A primitivação por partes e a primitivação por substituição são artifícios a que recorremos quando a função a primitivar não é nem de primitivação imediata nem função racional. Recorrendo às respectivas fórmulas de primitivação por partes e/ou de primitivação por substituição esperamos conseguir passar o problema da primitiva da função em questão para uma das duas categorias iniciais: primitivas imediatas ou primitivas de funções racionais.

1.5 Cálculo Integral novamente

Começamos esta secção recordando que a nossa motivação para o Cálculo Integral tinha sido o cálculo de áreas de figuras planas e que isso nos levou a definir um objecto matemático que associava a uma função (integrável) positiva f e a um intervalo $[a, b]$ contido no seu domínio, a área delimitada pelo gráfico dessa função, pelo eixo dos XX e pelas rectas de equação $x = a$ e $x = b$, o integral de f sobre $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$. No entanto, todas as definições que demos e resultados que obtivémos não dependem de f ser positiva. Vamos portanto passar a considerar funções não necessariamente positivas nas nossas discussões. Ficam desde já as perguntas: qual o significado a atribuir a $\int_a^b f(x)dx$ se f for uma função negativa? Qual o interesse de integrar funções que não sejam necessariamente positivas? A seguinte proposição contribui para as respostas.

Proposição 1.7 *Seja f limitada em $[a, b]$. Então*

$$\underline{\int_a^b} \big(-f\big)(x)dx = -\overline{\int_a^b} f(x)dx \qquad \overline{\int_a^b} \big(-f\big)(x)dx = -\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Em particular, se f é integrável em $[a, b]$, $\big(-f\big)$ tambem é e

$$\int_a^b \big(-f\big)(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Dem. Seja d uma decomposição de $[a,b]$ com pontos $a=x_0$, x_1, ..., $x_n=b$. Para qualquer k

$$m_k\big(-f\big)=\inf\{\big(-f\big)(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}=-\sup\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}=-M_k(f)$$

donde

$$s_d\big(-f\big)=\sum_{k=1}^{n}m_k\big(-f\big)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\big(-M_kf\big)(x_k-x_{k-1})=-\sum_{k=1}^{n}M_k(f)(x_k-x_{k-1})=-S_d(f)$$

Então

$$\underline{\int_a^b}\big(-f\big)(x)dx=\sup\{s_d\big(-f\big)\mid d \text{ é decomposição de } [a,b]\}=\sup\{-S_d(f)\mid d \text{ é decomposição de } [a,b]\}=$$

$$=-\inf\{S_d(f)\mid d \text{ é decomposição de } [a,b]\}=-\overline{\int_a^b}f(x)dx$$

Analogamente,

$$\overline{\int_a^b}\big(-f\big)(x)dx=-\underline{\int_a^b}f(x)dx$$

Em particular, se f é integrável em $[a,b]$, então

$$\underline{\int_a^b}\big(-f\big)(x)dx=-\overline{\int_a^b}f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx=-\underline{\int_a^b}f(x)dx=\overline{\int_a^b}\big(-f\big)(x)dx$$

donde, $\big(-f\big)$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b\big(-f\big)(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

■

Ficamos então com uma interpretação para o integral de uma função negativa: é o integral da função simétrica multiplicado por menos um. De uma forma sucinta embora pouco precisa, é a área com sinal negativo.

Proposição 1.8 (Monotonia do integral) *Seja $f(x)\le g(x)$, para todo o x em $[a,b]$. Então*

$$\overline{\int_a^b}f(x)dx\le\overline{\int_a^b}g(x)dx,\qquad \underline{\int_a^b}f(x)dx\le\underline{\int_a^b}g(x)dx$$

Em particular, se f e g são integráveis,

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$$

Dem. Seja d uma decomposição de $[a,b]$ com pontos $a=x_0$, x_1, ..., $x_n=b$. Como $f(x)\le g(x)$, para qualquer k

$$M_k(f)=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}\le\sup\{g(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}=M_k(g)$$

e

$$m_k(f)=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}\le\inf\{g(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k]\}=m_k(g)$$

donde estas desigualdades implicam desigualdades das somas de Darboux (superiores e inferiores, resp.) que por sua vez implicam desigualdades dos integrais superiores e inferiores (resp.) (exercício), isto é:

$$\overline{\int_a^b}f(x)dx\le\overline{\int_a^b}g(x)dx,\qquad \underline{\int_a^b}f(x)dx\le\underline{\int_a^b}g(x)dx$$

Em particular, se f e g são integráveis,

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$$

■

Corolário 1.1 *Se $g(x) \geq 0$ em $[a,b]$, então $\int_a^b g(x)dx \geq 0$*

Dem. Fazer $f(x) = 0$ na proposição anterior. ∎

Corolário 1.2 *Se $l \leq f(x) \leq L$ em $[a,b]$ (l e L constantes), então*

$$l(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq L(b-a)$$

Dem. Usar proposição anterior. ∎

Quando $l > 0$ a interpretação geométrica é que a área dada pelo integral de f é maior ou igual do que a área do rectângulo de altura l e base $b-a$ e menor ou igual que a área do rectângulo de altura L e base $b-a$. Tem-se ainda para $l > 0$:

$$l \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq L$$

Isto sugere a seguinte,

Definição 1.4

Se f é integrável em $[a,b]$, o valor médio de f é

$$\langle f \rangle = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Proposição 1.9 (Decomposição do intervalo de integração) *Seja f limitada em $[a,b]$ e $a < c < b$. Então,*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

Em particular, se f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, f será tambem integrável em $[a,b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dem. Seja $\delta > 0$. Como

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx = \inf\{S_d(f) \mid d \text{ é decomposição de } [a,c]\}$$

então existe decomposição d_1 de $[a,c]$ tal que

$$S_{d_1}(f) < \overline{\int_a^c} f(x)dx + \frac{\delta}{2}$$

e analogamente, existe uma decomposição d_2 de $[c,b]$ tal que

$$S_{d_2}(f) < \overline{\int_c^b} f(x)dx + \frac{\delta}{2}$$

donde, somando,

$$\Big(S_d(f) =\Big) S_{d_1}(f) + S_{d_2}(f) < \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx + \delta$$

(onde d é uma decomposição de $[a,b]$ que contem exactamente os pontos de d_1 e de d_2). Então, para todo o $\delta > 0$ existe uma decomposição d de $[a,b]$ tal que

$$S_d(f) < \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx + \delta$$

Como $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ é o ínfimo das $S_d(f)$ **sobre todas as decomposições de** $[a, b]$, então

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

Mostramos agora a desigualdade contrária (provando assim a igualdade). Seja d uma decomposição de $[a, b]$ incluindo o ponto c, tal que

$$S_d(f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \delta$$

Seja d_1 uma decomposição de $[a, c]$ usando exactamente os pontos de d que pertencem a $[a, c]$ e d_2 uma decomposição de $[c, b]$ usando exactamente os pontos de d que pertencem a $[c, b]$. Então,

$$\left(\overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq\right) S_{d_1}(f) + S_{d_2}(f) = S_d(f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \delta$$

donde

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

estabelecendo assim, com a ajuda da desigualdade estabelecida antes, que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

Analogamente,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$

Finalmente, se f é integrável tanto em $[a, c]$ como em $[c, b]$,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

donde f é integrável em $[a, b]$ com

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

■

A proposição seguinte é a generalização óbvia de dois a n subintervalos de $[a, b]$.

Corolário 1.3 *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Seja d uma decomposição de $[a, b]$ com pontos $a = x_0$, x_1, ..., x_n. Então,*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \underline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)dx \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)dx$$

Em particular, se f é integrável em $[x_{k-1}, x_k]$ para cada k, f será tambem integrável em $[a, b]$, tendo-se

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

Dem. Por indução no número de subintervalos. ■

Corolário 1.4 *Se f é integrável em $[a, b]$ e $a < c < b$ então f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, com*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dem.

$$\int_a^b f(x)dx \left(= \overline{\int_a^b} f(x)dx \right) = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \left(= \underline{\int_a^b} f(x)dx \right) = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$

donde, subtraindo ordenadamente,

$$0 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \left(\overline{\int_a^c} f(x)dx - \underline{\int_a^c} f(x)dx \right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)dx - \underline{\int_c^b} f(x)dx \right)$$

Como as duas parcelas dentro dos parentesis são **ambas não negativas** e a sua soma é zero, então

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx - \underline{\int_a^c} f(x)dx = 0 \qquad \overline{\int_c^b} f(x)dx - \underline{\int_c^b} f(x)dx = 0$$

o que implica que f é integrável am $[a, b]$ com

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

■

Corolário 1.5 *Se f é integrável em $[a, b]$ e $a < c < d < b$ então f é integrável em $[c, d]$*

Dem. Aplicar corolário anterior ao intervalo $[a, b]$ e ao ponto d e depois ao intervalo $[a, d]$ e ao ponto c.
■

Observação 1.6

Este último corolário permite afirmar que se a função é integrável num intervalo então é integrável em qualquer subintervalo desse intervalo.

Em particular dada f integrável em $[a, b]$, se fixarmos o extremo inferior de integração e deixarmos variar o extremo superior de integração estamos a definir uma função (do extremo superior de integração):

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a, b]$$

Estudaremos, seguidamente algumas propriedades desta função.

1.6 Integral indefinido

Definição 1.5

Seja f integrável em $[a, b]$. A função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a, b]$$

designa-se por **integral indefinido de** f.

Proposição 1.10 *Seja f integrável em $[a, b]$. O integral indefinido de f é uma função contínua em $[a, b]$.*

. Dem. Dado c em $[a, b]$ tem-se

$$\lim_{h \mapsto 0} \Big(F(c+h) - F(c) \Big) = \lim_{h \mapsto 0} \left(\int_a^{c+h} f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \right) = \lim_{h \mapsto 0} \left(\int_c^{c+h} f(t)dt \right) = 0$$

já que

$$0 = \lim_{h \mapsto 0} lh \leq \lim_{h \mapsto 0} \left(\int_c^{c+h} f(t)dt \right) \leq \lim_{h \mapsto 0} Lh = 0$$

onde l e L são o ínfimo e o supremo de f em $[a, b]$. Como $\lim_{h \mapsto 0} \Big(F(c+h) - F(c) \Big) = 0$, então $\lim_{h \mapsto 0} F(c+h) = F(c)$, ou seja F é contínua em qualquer ponto c do intervalo $[a, b]$. ■

Teorema 1.2 (Teorema Fundamental da Análise) *Seja f integrável em $[a, b]$ e considere-se o integral indefinido de f*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a, b]$$

F é diferenciável em todo o ponto c de $[a, b]$ aonde f é contínua, tendo-se

$$F'(c) = f(c)$$

Dem. Seja $\delta > 0$ e suponha-se f contínua em c. Por definição de continuidade existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\text{se} \quad |x - c| < \epsilon \text{ então } |f(x) - f(c)| < \delta$$

Por outro lado,

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) = \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt}{x - c} - \frac{\int_c^x f(c)dt}{x - c} = \frac{\int_c^x f(t)dt - \int_c^x f(c)dt}{x - c} = \frac{\int_c^x \big(f(t) - f(c) \big) dt}{x - c}$$

donde,

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| = \left| \frac{\int_c^x \big(f(t) - f(c) \big) dt}{x - c} \right| = \frac{\left| \int_c^x \big(f(t) - f(c) \big) dt \right|}{\big| x - c \big|} \leq \frac{\int_c^x \big| f(t) - f(c) \big| dt}{\big| x - c \big|}, \quad \big(\text{ para } x > c \big) \leq$$

$$\leq \frac{\int_c^x \delta dt}{\big| x - c \big|} = \frac{\delta(x - c)}{x - c} = \delta$$

e analogamente para $x < c$ donde, dado $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \epsilon \text{ então } \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| < \delta$$

ou seja

$$\lim_{x \mapsto c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$$

isto é

$$F'(c) = f(c)$$

sempre que f seja contínua em c. ■

Observação 1.7

Duas propriedades do integral que usámos nesta demonstração:

$$1. \qquad \int_a^b \big(\lambda f + \mu g \big) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \qquad \Big(\text{Linearidade do Integral} \Big)$$

$$2. \qquad \Big| \int_a^b f \Big| \leq \int_a^b |f|$$

A demonstração desta segunda propriedade é simples. Seja f integrável em $[a, b]$. Então, em $[a, b]$ tem-se trivialmente $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ donde

$$-\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

ou seja

$$\Big|\int_a^b f(t)dt\Big| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

■

Exemplo 1.20

Calcular:

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3)dt}{x^4}$$

Já que $f(t) = \sin(t^3)$ é uma função integrável sobre intervalos limitados e integrais de tais funções sobre intervalos degenerados (isto é, intervalos constituídos por um só ponto) são nulos, estamos então perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de Cauchy, vamos estudar o limite do quociente das derivadas:

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\left(\int_0^x \sin(t^3)dt\right)'}{\left(x^4\right)'} = \lim_{x\mapsto 0} \frac{\sin(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

donde

$$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3)dt}{x^4} = \frac{1}{4}$$

Corolário 1.6 *Se f é contínua em $[a,b]$, então f é primitivável em $[a,b]$ - a sua primitiva é o seu integral indefinido.*

■

Observação 1.8

O que é que acontece com funções como

$$f(x) = e^{-x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{\log(x)}, \qquad h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

1.7 Integração por partes

Proposição 1.11 *Se u e v são funções C^1 em $[a,b]$ então*

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v, \qquad \textit{onde } [uv]_a^b := u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Dem. Notar que:

$$\int_a^b uv' + \int_a^b u'v = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$$

■

1.8 Integração por substituição

Proposição 1.12 *Seja f integrável em $[a,b]$ e $\varphi : [\alpha,\beta]$ uma bijecção diferenciável. Então,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Dem. Omitida. ■

Os seguintes corolários desta proposição dão uns primeiros exemplos da importância dela.

Corolário 1.7 (Invariância por translacção) *Se $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ então, dado τ em $\mathbb{R}$, $f(x-\tau)$ é integrável em $[a+\tau, b+\tau]$ e tem-se,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(x-\tau)dx$$

Dem. Aplicar o teorema anterior com $\varphi(t) = t - \tau$, donde $\varphi'(t) = 1$. Tem-se,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(t-\tau)\cdot 1 \cdot dt = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(x-\tau)dx$$

■

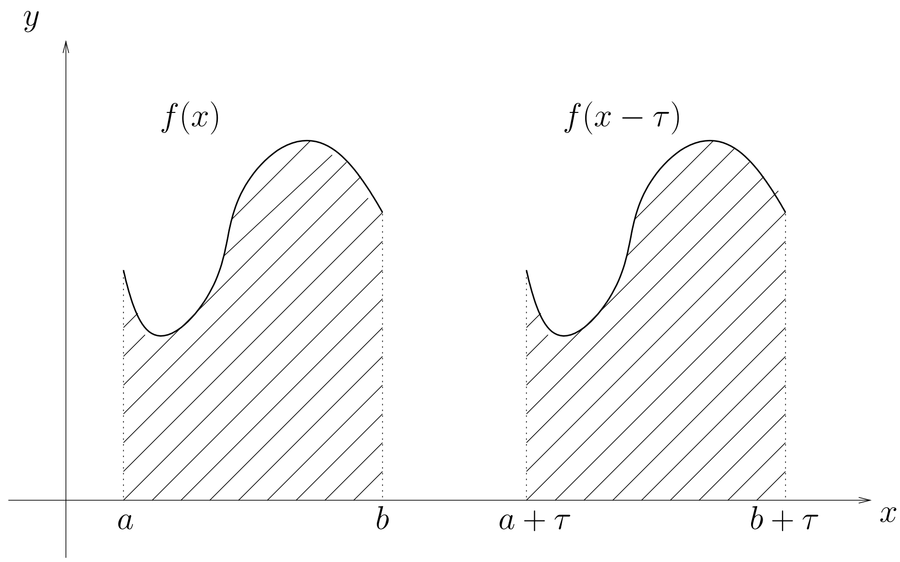

Figure 6: As áreas a tracejado são iguais

Corolário 1.8 (Invariância por simetria) *Se $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ então $f(-x)$ é integrável em $[-b,-a]$,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)dx$$

Dem. Aplicar o teorema anterior com $\varphi(t) = -t$, donde $\varphi'(t) = -1$. Tem-se,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{-a}^{-b} f(-t)\cdot(-1)\cdot dt = -\int_{-a}^{-b} f(-t)dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)dt = \int_{-b}^{-a} f(-x)dx$$

■

1.9 Teorema da média

Teorema 1.3 *Sejam f e g integráveis em $[a,b]$. Se g tem sinal constante em $[a,b]$ tem-se,*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

em que μ é um número compreendido entre o supremo e o ínfimo de f em $[a,b]$.

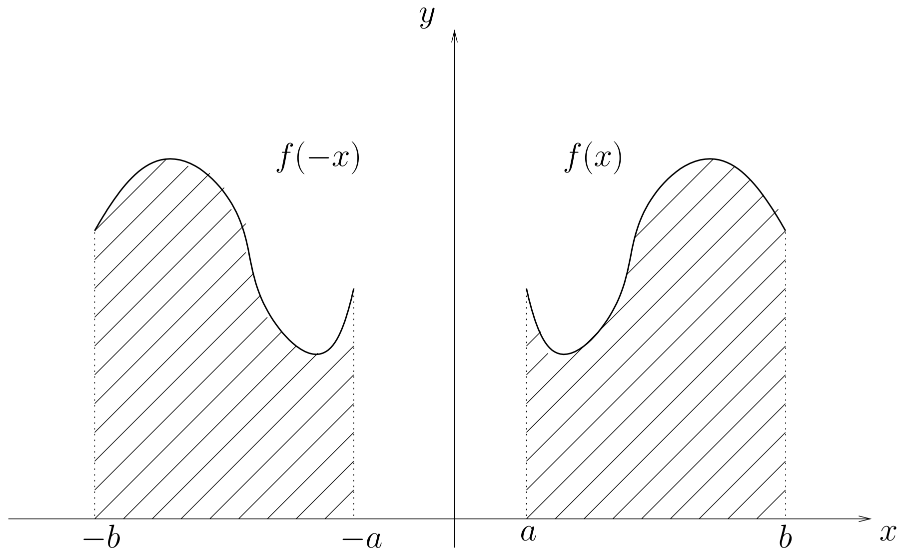

Figure 7: As áreas a tracejado são iguais

Dem. Suponha-se $g(x) \geq 0$, para todo o x em $[a, b]$ e sejam

$$l = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad \text{e} \qquad L = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Então $l \leq f(x) \leq L$, para todo o x em $[a, b]$. Donde,

$$lg(x) \leq f(x)g(x) \leq Lg(x), \qquad \text{para todo o } x \in [a, b]$$

Então,

$$l \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq L \int_a^b g(x)dx$$

Se $\int_a^b g(x)dx = 0$ vem $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Se $\int_a^b g(x)dx > 0$, vem

$$l \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq L$$

donde fazendo

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

obtem-se o resultado. ■

Corolário 1.9 *Se f é contínua em $[a, b]$ então existe ξ em $[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

■

Exemplo 1.21

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{\xi} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(x)dx = \frac{2}{\xi}, \qquad \text{com } 2\pi \leq \xi \leq 3\pi$$

donde

$$\frac{2}{3\pi} \leq \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \leq \frac{1}{\pi}$$

2 Aplicações Geométricas do Integral

Como vimos, o integral permite-nos calcular áreas de figuras planas tais como aquelas representadas nas figuras 8 e figura 9

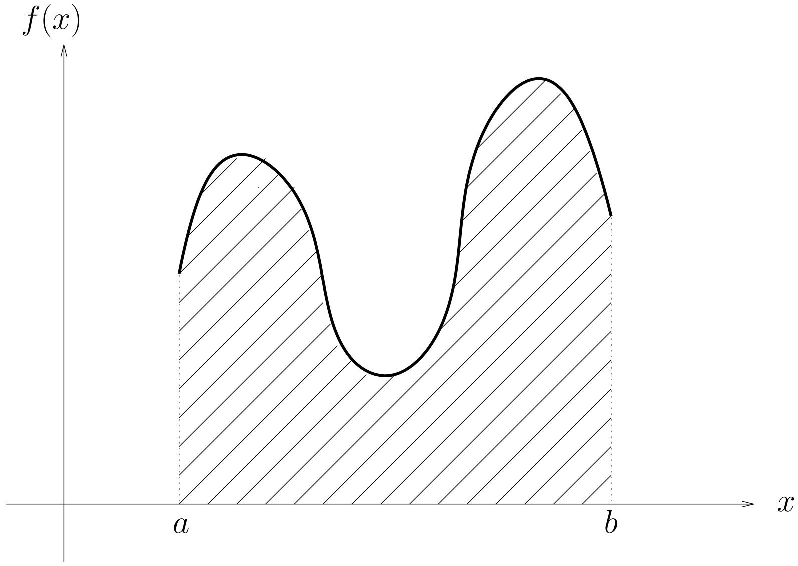

Figure 8: Área a tracejado: $\int_a^b f(t)dt$

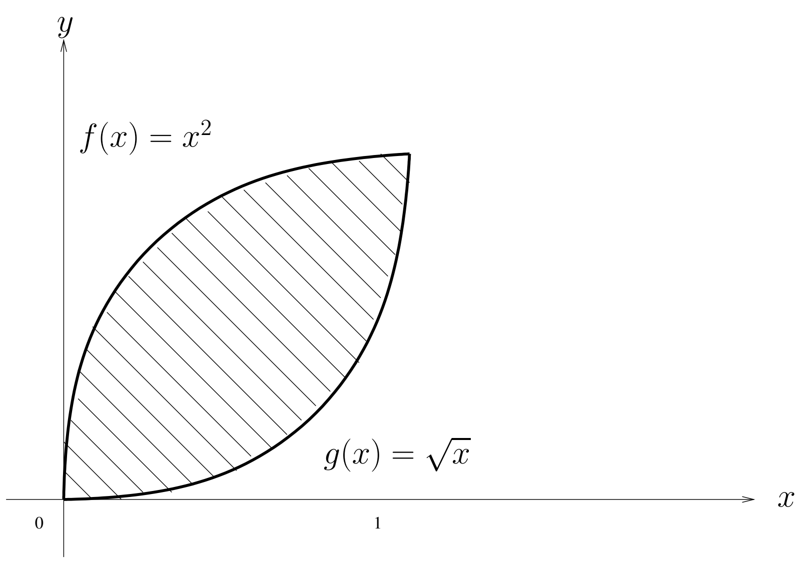

Figure 9: Área a tracejado: $\int_0^1 \big(f(t) - g(t)\big)dt$

Vamos agora ver que certo tipo de volumes, comprimentos de linhas e áreas de figuras **não** planas podem ser calculados através do integral em $\mathbb{R}$. Começamos pelos sólidos obtidos por rotação de uma área sob um gráfico em torno do eixo dos XX:

2.1 Volume obtido por rotação de figura plana em torno do eixo dox XX

Considere a figura 10. A rotação da área mais escurecida em torno do eixo dos XX dá origem a um cilindro elementar de raio $f(x)$ e altura dx portanto, de volume elementar $dV = \pi\big(f(x)\big)^2 dx$ (figura 11): O integral sobre o intervalo $[a, b]$ deste dV, "soma" as contribuições associadas a cada um dos dx, donde

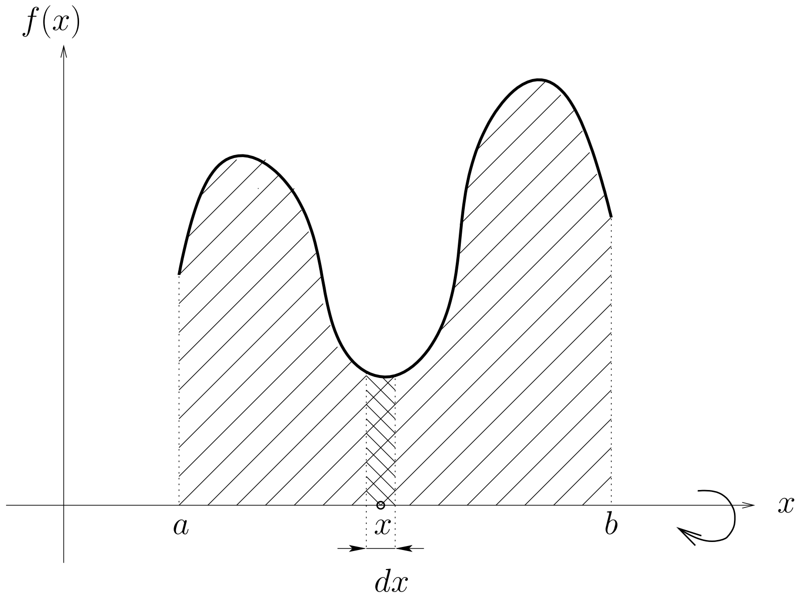

Figure 10: ... sólido obtido por rotação em torno do eixo dos XX

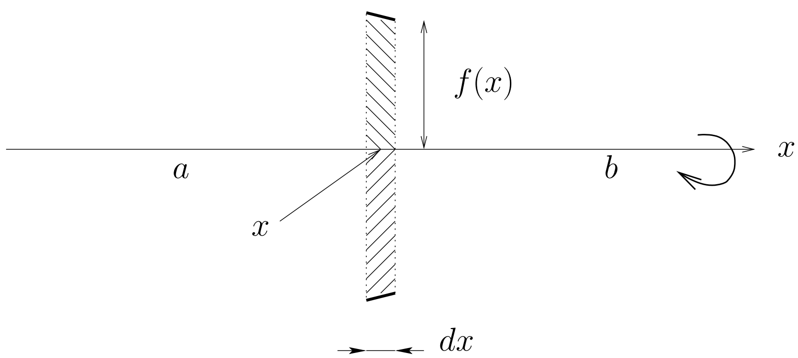

Figure 11: Volume elementar

o volume total V é:

$$V = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx$$

Exemplo 2.1

Volume da esfera de raio r (figura 12).

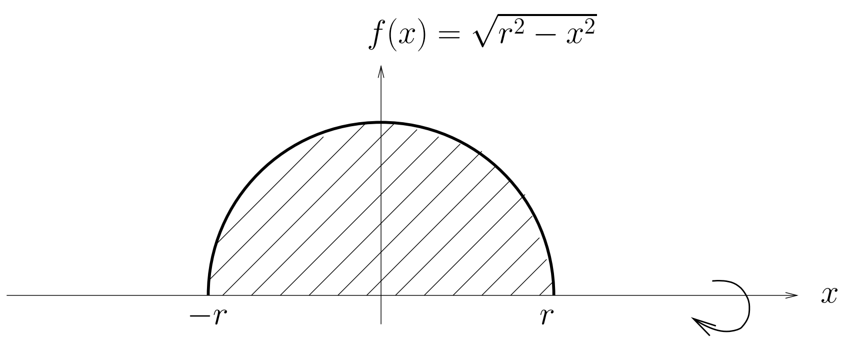

Figure 12: ... calculando o volume da esfera de raio r.

$$\int_{-r}^{r} \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \int_{-r}^{r} \pi\left(r^2 - x^2\right) dx = \cdots = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2.2 Volume obtido por rotação de figura plana em torno do eixo dos YY

Considere a figura 13 que esboça a rotação da figura a tracejado em torno do eixo dos YY, Neste caso o

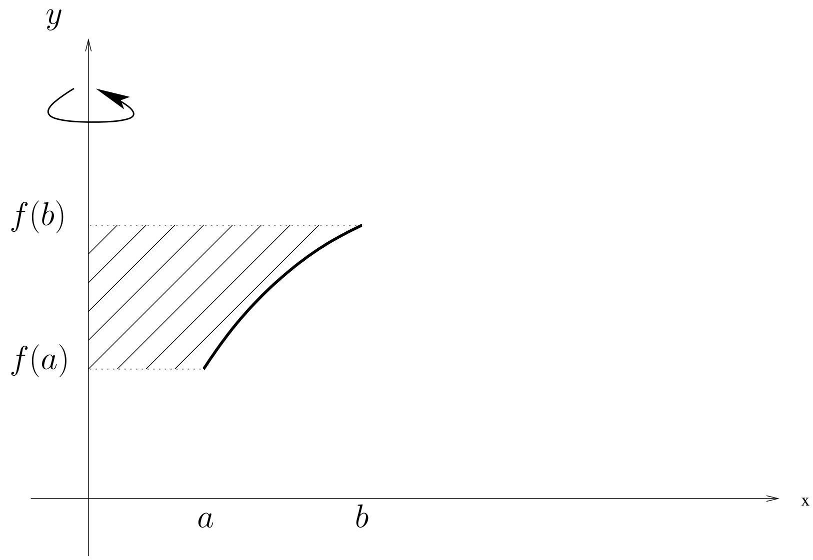

Figure 13: Rotação em torno do eixo dos YY

raio do cilindro elementar é $f^{-1}(y)$ donde o volume é

$$V = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi\left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$$

Notar tambem que, se a função f é invertível, podemos fazer a substituição $y = f(x)$, donde

$$V = \int_{f^{-1}\left(f(a)\right)}^{f^{-1}\left(f(b)\right)} \pi\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 \cdot f'(x) dx = \int_a^b \pi x^2 f'(x) dx$$

2.3 Outro tipo de rotação de figura plana em torno do eixo dos YY

Considere a figura 14. Nesta situação, o volume elementar é a diferença do volume de dois cilindros (figura 15), o de base de raio x e o de base de raio $x + dx$:

$$dV = \pi(x + dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) = \pi(x^2 + 2xdx + (dx)^2) f(x) - \pi x^2 f(x) \approx 2\pi x f(x) dx$$

and so

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

2.4 Comprimentos de linhas

Suponhamos que queremos calcular o comprimento de uma linha que é o gráfico de uma função (figura 16). O comprimento elementar é dl onde

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx^2 = \left(1 + \left(f'(x)\right)^2\right) dx^2$$

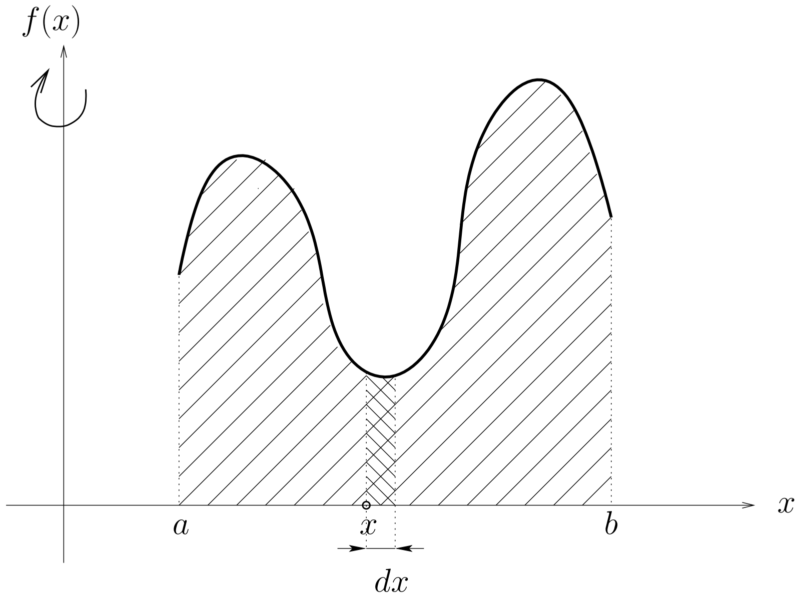

Figure 14: ... outro sólido obtido por rotação em torno do eixo dos YY

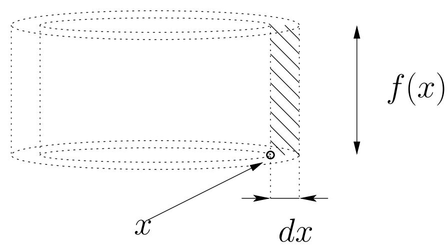

Figure 15: ... volume elementar

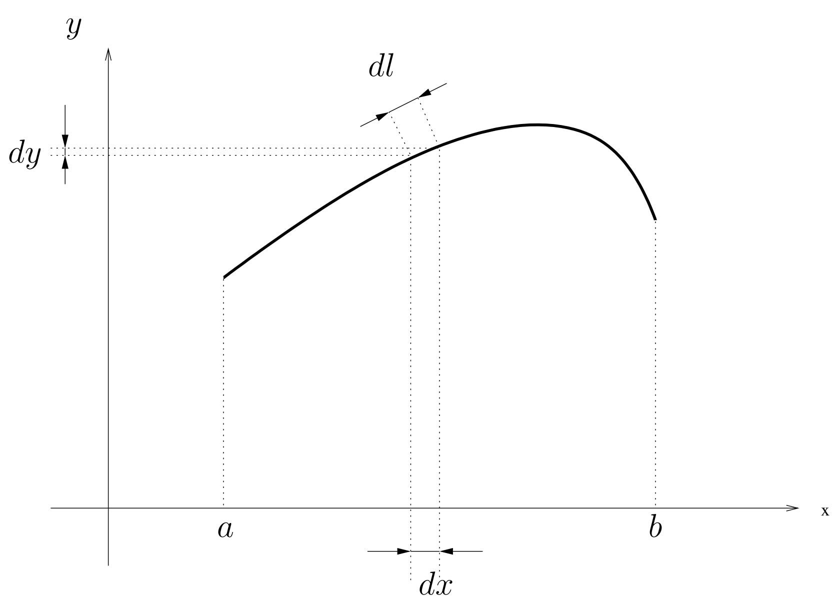

Figure 16: ... calculando o comprimento da linha

donde

$$dl = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

e finalmente, o comprimento total da linha é:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Exemplo 2.2

Comprimento da circunferência de raio r (figura 17).

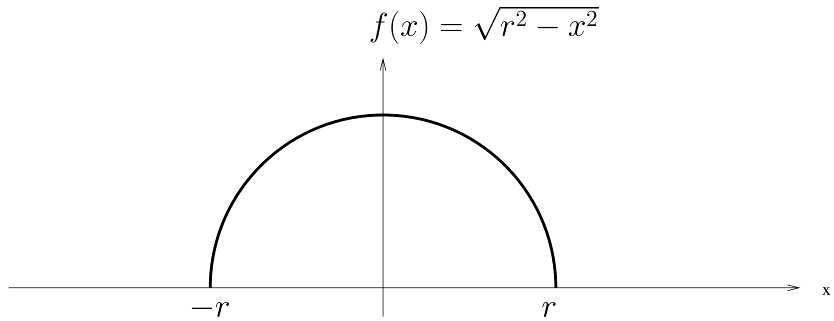

Figure 17: Circunferência de raio r (“metade”)

Com base na figura 17, tem-se,

$$l = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2r \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = (\ x = rt\ )\ 2r \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{r^2 - r^2t^2}} r dt = 2r \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt =$$
$$= 2r\big[\arcsin(t)\big]_{-1}^{1} = 2r\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi r$$

2.5 Áreas de superfícies

Suponhamos que queremos calcular a área da superfície obtida por rotação em torno do eixo dos XX do gráfico da função na figura 16. A contribuição da área elementar, dS, obtida por rotação do elemento de linha dl está esboçado na figura 18. Essa contribuição é:

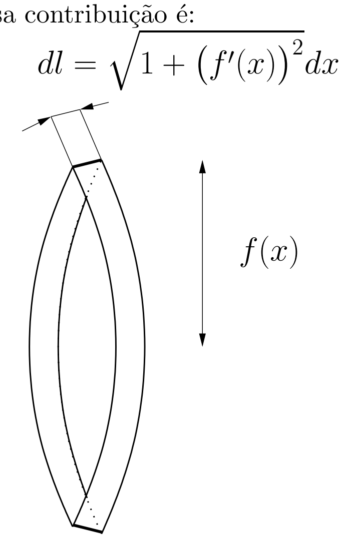

Figure 18: Elemento de área da superfície

$$dS = 2\pi f(x) dl = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

e portanto a área da superfície obtida por rotação do gráfico na figura 16 em torno do eixo dos XX é:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx$$

Exemplo 2.3

A área da esfera de raio r ($r > 0$).

Com base na figura 17 e usando a fórmula acima obtemos

$$S = \int_{-r}^{r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx = \int_{-r}^{r} 2\pi r dx = 4\pi r^2$$

Para finalizar esta secção, deixamos como exercício notar que se a superfície é obtida por rotação de um gráfico de função como a da figura 16 mas em torno do eixo dos YY a área é dada por:

$$S = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx$$

3 Integrais Impróprios

Integrais impróprios são aqueles em que se realiza a integração de uma função (integrável) sobre um intervalo não limitado, como por exemplo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$$

ou quando o intervalo de integração é limitado mas a função integranda não é limitada, como por exemplo

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

ou finalmente quando nem o intervalo de integração é limitado nem a função integranda é limitada.

3.1 Integrais Impróprios: Intervalo de integração não é limitado

Comecemos então por estudar os integrais impróprios de funções integráveis sobre intervalos não limitados.

Definição 3.1

Seja f uma função definida em $[a,\infty[$ e integrável em todo o intervalo $[a,x]$ qualquer que seja o $x > a$. Se existe

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f(t)dt$$

definimos

$$\int_a^\infty f(t)dt \overset{def.}{=} \lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f(t)dt$$

dizendo, então, que $\int_a^\infty f(t)dt$ é um integral impróprio convergente.

Exemplo 3.1

a) $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}dt = \lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\mapsto\infty}\Big[\log(t)\Big]_1^x = \lim_{x\mapsto\infty}\Big(\log(x)-\log(1)\Big) = \lim_{x\mapsto\infty}\log(x) = \infty$$

Então $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$ diverge.

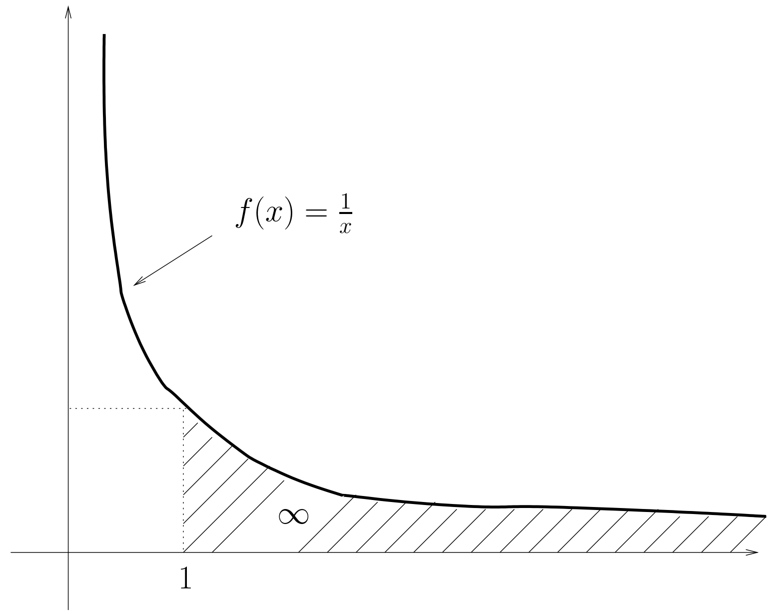

Figure 19: Área infinita

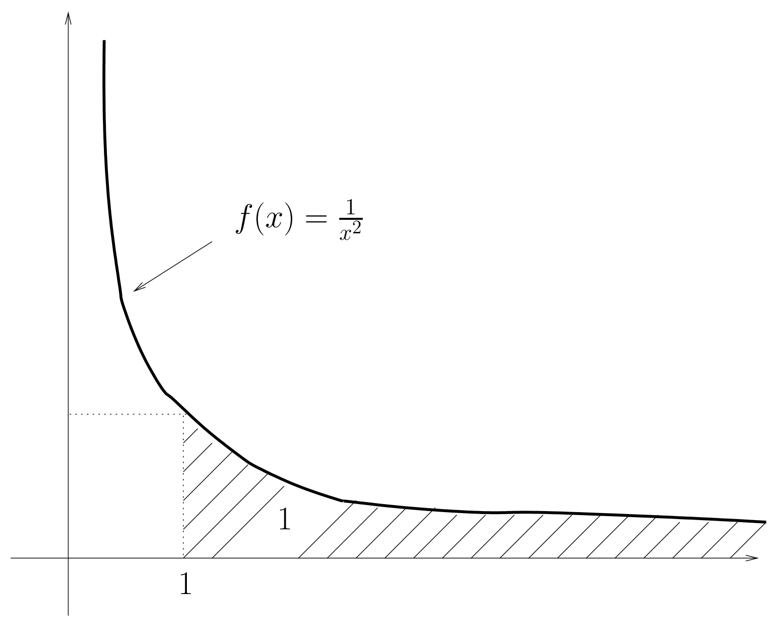

Figure 20: Área finita

b) $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \mapsto \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \mapsto \infty} \Big[-\frac{1}{t} \Big]_1^x = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(-\frac{1}{x} - \big(-\frac{1}{1} \big) \Big) = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(-\frac{1}{x} + 1 \Big) = 1$$

Então $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$ converge.

Graficamente:

Se f é integrável em qualquer subintervalo fechado e limitado de $]-\infty, a]$ (como por exemplo, qualquer função contínua em $\mathbb{R}$) faz sentido considerar

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \int_x^a f(t) dt$$

Caso este limite exista definimos

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt \stackrel{def.}{=} \lim_{x\mapsto -\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt$$

dizendo-se então que este integral impróprio é convergente. De notar que o estudo da natureza destes integrais (isto é, se são ou não convergentes) se reduz ao estudo da natureza de integrais do tipo $\int_a^\infty g(t)dt$ já que

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x\mapsto -\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt = (u=-t,\dots) \lim_{x\mapsto -\infty} \int_{-x}^{-a} f(-u)\big(-du\big) = \lim_{x\mapsto -\infty} \int_{-a}^{-x} f(-u)du =$$
$$= \lim_{x\mapsto \infty} \int_{-a}^{x} f(-u)du$$

Por outro lado se

$$\int_{0}^{\infty} f(t)dt \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{0} f(t)dt$$

forem convergentes, diremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

é convergente.

Proposição 3.1 *Seja f definida em $[a,\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x > a$. Seja λ uma constante real não nula. Então, os integrais,*

$$\int_a^\infty f \quad e \quad \int_a^\infty \lambda f$$

convergem ambos ou divergem ambos - isto é, têm ambos a mesma natureza. Em caso de convergência, tem-se ainda,

$$\int_a^\infty \lambda f = \lambda \int_a^\infty f$$

Dem. Notando que, caso um dos seguintes limites exista, se tem,

$$\lambda \cdot \lim_{x\mapsto\infty} \int_a^x f = \lim_{x\mapsto\infty} \Big(\lambda \cdot \int_a^x f\Big) = \lim_{x\mapsto\infty} \int_a^x (\lambda \cdot f)$$

o que implica que qualquer um dos outros limites tambem tem que existir, então a convergência de um integral implica a convergência do outro integral. Por outro lado, se um dos integrais diverge então o outro integral tambem tem que divergir. De facto como acabámos de ver, se um dos integrais converge então um dos limites acima existe o que implica que os outros limites tambem existam. ■

Proposição 3.2 *Sejam f e g definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x > a$. Se*

$$\int_a^\infty f \quad e \quad \int_a^\infty g$$

convergem, então,

$$\int_a^\infty (f+g)$$

tambem converge e tem-se

$$\int_a^\infty (f+g) = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g$$

Dem. Tem-se,

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x (f+g) = \lim_{x\mapsto\infty}\left(\int_a^x f + \int_a^x g\right) = \lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f + \lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x g = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g$$

ou seja, existe o limite

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x (f+g)$$

o que quer dizer, por definição, que o integral impróprio da integranda $f+g$ converge tendo-se ainda

$$\int_a^\infty (f+g) = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g$$

■

Observação 3.1

Se $\int_a^\infty f$ e $\int_a^\infty g$ **não** convergem então a natureza do integral impróprio da soma $f+g$ tanto pode ser convergente como divergente:

Exercício 3.1

Qual a natureza de $\int_1^\infty (f+g)$ quando

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{x}=g(x) \qquad\qquad b)\quad f(x)=\frac{1}{x}=-g(x)\quad ?$$

Proposição 3.3 *Seja f definida em $[a,\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x>a$. Então, para $c>a$,*

$$\int_a^\infty f \qquad e \qquad \int_c^\infty f$$

têm a mesma natureza e, em caso de convergência,

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f$$

Dem. Analogamente à s demonstrações anteriores, notando que

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f = \lim_{x\mapsto\infty}\left(\int_a^c f + \int_c^x f\right) = \int_a^c f + \lim_{x\mapsto\infty}\int_c^x f$$

em que, na última igualdade, $\int_a^c f$ "passa para fora do limite", já que não depende de x (que é a variável sobre a qual se está a calcular o limite). ■

Exemplo 3.2

Seja

$$f(x)=\begin{cases} e^{x\sqrt{\tan(e^x)}}, & 0<x<10^{100} \\ \frac{1}{x^2}, & x\geq 10^{100}\end{cases}$$

Então, $\int_0^\infty f$ é convergente porque

$$\int_{10^{100}}^\infty \frac{1}{t^2}dt$$

é convergente (como vimos atrás).

Teorema 3.1 (Integração por partes) *Se u e v são funções contínuas com derivada contínua em $[a,\infty[$, e*

$$\text{Se} \int_a^\infty u'v \quad \text{converge e} \quad \lim_{x\mapsto\infty}\Big[uv\Big]_a^x \quad \text{é finito}$$

então,

$$\int_a^\infty uv' \quad \text{converge}$$

e tem-se

$$\int_a^\infty uv' = \lim_{x\mapsto\infty}\Big[uv\Big]_a^x - \int_a^\infty u'v$$

Dem. Omitida. ∎

Teorema 3.2 (Integração por substituição) *Seja f definida em $[a,\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x>a$. Seja φ uma bijecção diferenciável de $[\alpha,\infty[$ sobre $[a,\infty[$. Então,*

$$\int_a^\infty f(t)dt \quad \text{e} \quad \int_a^\infty f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt$$

têm a mesma natureza e, em caso de convergência, são iguais.

Dem. Omitida. ∎

O estudo dos integrais impróprios tem algumas semelhanças com o estudo das séries. Em particular, dado um integral impróprio, pretendemos ser capazes de saber se ele converge ou não (muitas vezes mais do que saber o valor desse integral - em caso de convergência). Para isso, vamos ter, por um lado, uma colecção de funções cuja natureza dos respectivos integrais impróprios vai ser conhecida e por outro lado, vamos ter resultados que nos permitem relacionar a natureza de dois integrais impróprios. Assim, quando quisermos analisar a natureza de um novo integral impróprio, tentamos relacioná-lo com outros de natureza já conhecida através de resultados como o seguinte:

Teorema 3.3 (Critério de majoração) *Sejam f e g positivas e definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x>a$. Seja ainda $f(x)\le g(x)$ para todo o $x>a$.*

$$\text{Se} \int_a^\infty g \quad \text{converge, então} \quad \int_a^\infty f \quad \text{tambem converge.}$$

$$\text{Se} \int_a^\infty f \quad \text{diverge, então} \quad \int_a^\infty g \quad \text{tambem diverge.}$$

Dem. Começamos por observar que

$$F(x) = \int_a^x f$$

é crescente já que $f>0$. Assim, o limite

$$\lim_{x\mapsto\infty} F(x) = \int_a^\infty f$$

existe **em** $\overline{\mathbb{R}}$, podendo portanto ser infinito. Seguidamente mostramos que se $\int_a^\infty g$ converge, então a função F é majorada e que portanto o referido limite é finito, ou seja, a convergência de $\int_a^\infty g$ implica a convergência de $\int_a^\infty f$. De facto, como $f(t)\le g(t)$ para todo o $t\ge a$, então $\int_a^x f \le \int_a^x g$, donde,

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f \le \lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x g < \infty$$

A segunda afirmação do teorema é o contrarecíproco da afirmação que acabámos de provar. ∎

Exemplo 3.3

Qual a natureza de
$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4} \quad ?$$

Comecemos por

Exemplo 3.4

Qual a natureza de
$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$
(em que α é um parâmetro real)? Separemos o caso $\alpha = 1$:
$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\mapsto\infty}\Big[\log(t)\Big]_1^x = \lim_{x\mapsto\infty}\log\Big(\frac{x}{1}\Big) = \infty$$
donde $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ com $\alpha = 1$ é divergente. Analisemos agora para $\alpha \neq 1$:
$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \lim_{x\mapsto\infty}\Big[\frac{1}{-\alpha+1}t^{-\alpha+1}\Big]_1^x = \lim_{x\mapsto\infty}\frac{1}{-\alpha+1}\big(x^{-\alpha+1}-1\big)$$
donde
$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{para } \alpha > 1 \\ \infty & \text{para } \alpha < 1 \end{cases}$$
Assim,
$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \text{converge para} & \alpha > 1 \\ \text{diverge para} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Então para se averiguar a natureza de $\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ notamos que
$$\frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{t^4}$$
e que $\frac{1}{t^4}$ é integranda de um integral impróprio convergente - $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ com $\alpha = 4 > 1$. Pelo critério de majoração $\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ é convergente.

Corolário 3.1 *Sejam f e g positivas e definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x > a$. Suponha-se ainda que $g(x) > 0$ para todo o $x > a$ e que existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que*
$$c_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq c_2 \qquad \textit{para todo o } x > a$$
Então,
$$\int_a^\infty f \quad e \quad \int_a^\infty g$$
têm a mesma natureza.

Dem.
$$c_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq c_2 \qquad \text{para todo o } x > a$$
é equivalente a
$$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x) \qquad \text{para todo o } x > a$$
Se $\int_a^\infty f$ converge então, pelo critério de majoração $\int_a^\infty c_1 g$ tambem converge donde $\big(c_1\big)^{-1}\int_a^\infty c_1 g = \int_a^\infty g$ tambem converge. Reciprocamente, se $\int_a^\infty g$ converge então $\int_a^\infty c_2 g$ tambem converge e pelo critério de majaoração $\int_a^\infty f$ converge. Analogamente para integrais divergentes. ■

Corolário 3.2 (Critério do limite) *Sejam f e g positivas e definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x>a$. Suponha-se ainda que $g(x)>0$ para todo o $x>a$ e que existe, em $\overline{\mathbb{R}}$,*

$$l=\lim_{x\mapsto\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\textit{Se}\qquad l>0\qquad \textit{então}\qquad \int_a^\infty f \quad \textit{e} \quad \int_a^\infty g \textit{ têm a mesma natureza} \tag{1}$$

$$\textit{Se}\qquad l=0\qquad \textit{então}\qquad \left[\int_a^\infty g \quad \textit{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^\infty f \textit{ converge}\right] \tag{2}$$

$$\textit{Se}\qquad l=\infty\qquad \textit{então}\qquad \left[\int_a^\infty f \quad \textit{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^\infty g \textit{ converge}\right] \tag{3}$$

(Notar a importância dos contrarecíprocos de (2) e (3))

Dem. $l=\lim_{x\mapsto\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ é equivalente a dizer, por definição de limite, que

$$\text{Para todo o } \epsilon>0 \text{ existe pelo menos um } \delta>0 \text{ tal que, sempre que } x>\frac{1}{\delta} \text{ então } \left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\epsilon$$

e desembaraçando de módulos e reescrevendo esta última expressão

$$\text{Para todo o } \epsilon>0 \text{ existe pelo menos um } \delta>0 \text{ tal que, sempre que } x>\frac{1}{\delta} \text{ então } l-\epsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<l+\epsilon$$

Caso (1): $l>0$. Tomando $\epsilon=\frac{l}{2}\big(>0\big)$, há-de existir um $\delta>0$ tal que

$$\text{com}\quad x>\delta \quad \text{se tenha } \frac{l}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3l}{2}$$

Então, estamos nas condições do Corolário anterior com $c_1=\frac{l}{2}$ e $c_2=\frac{3l}{2}$. Segue-se que os integrais impróprios em questão têm a mesma natureza.

Caso (2): $l=0$. Tomando $\epsilon=1\big(>0\big)$, há-de existir $\delta>0$ tal que

$$\text{com}\quad x>\delta \quad \text{se tenha } -1<\frac{f(x)}{g(x)}<1$$

Como as funções são positivas então a segunda desigualdade acima pode-se reescrever na forma

$$f(x)\le g(x)$$

Então pelo critério de majoração, se $\int_a^\infty g$ converge, então $\int_a^\infty f$ tambem converge.

Caso (3): $l=\infty$ - fica como exercício. ■

Exemplo 3.5

Qual a natureza de

$$a)\quad \int_1^\infty \frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}dx \quad ?$$

Considerando a função integranda, que é uma função racional em x, notamos que para x "muito grande" o comportamento do polinómio no numerador é "dado" por x^2, enquanto que o do polinómio no denominador é "dado" por x^3. Como

$$\lim_{x\mapsto\infty}\frac{\frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}}{\frac{x^2}{x^3}}=\lim_{x\mapsto\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x^2}}{\frac{3x^3+5x+1}{x^3}}=\lim_{x\mapsto\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{3+5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1+0}{3+0+0}=\frac{1}{3}>0$$

então, pelo critério do limite, os integrais impróprios

$$\int_1^\infty \frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

têm a mesma natureza (notar que $\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^3}$). Como $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ é integral impróprio divergente (ver exemplo 3.1), então o integral impróprio em estudo tambem é divergente.

$$b) \quad \int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^3}dx \quad ?$$

Comparemos a integranda $\frac{\log(x)}{x^3}$ com $\frac{1}{x^3}$ para subsequentemente tentarmos aplicar o critério do limite:

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{\log(x)}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\mapsto\infty} \log(x) = \infty$$

o que não nos dá, neste caso em particular, nenhuma indicação sobre a natureza do integral em estudo. Comparemos então a integranda em causa com $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{\log(x)}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

(use Cauchy...) e então pelo critério do limite, o integral impróprio em questão é convergente.

$$c) \quad \int_1^\infty e^{-x^2}dx \quad ?$$

Para resolver este exemplo, comecemos por estabelecer a natureza de mais uma colecção de integrais impróprios.

Exemplo 3.6

Qual a natureza de

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\alpha t}}$$

(em que α é um parâmetro real)? O caso $\alpha = 0$ corresponde a um integral divergente (exercício). Passemos ao caso $\alpha \neq 0$. Tem-se,

$$\lim_{x\mapsto\infty} \int_0^x \frac{dt}{e^{\alpha t}} = \lim_{x\mapsto\infty} \int_0^x e^{-\alpha t}dt = \lim_{x\mapsto\infty} \left[\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^x = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\mapsto\infty} \left[e^{-\alpha x} - 1\right]$$

donde

$$\lim_{x\mapsto\infty} \int_0^x \frac{dt}{e^{\alpha t}}dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \text{para } \alpha > 0 \\ \infty & \text{para } \alpha < 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\alpha t}} \quad \begin{cases} \text{converge para } \alpha > 0 \\ \text{diverge para } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Voltemos então à questão da convergência de

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

Como

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{1}{e^{x^2-x}} = 0$$

então, porque $\int_0^\infty \frac{dt}{e^t}$ é convergente (corresponde ao caso $\alpha = 1$ no exemplo acima), pelo critério do limite, $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ tambem é convergente.

Teorema 3.4 *Seja f definida em $[a, \infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x > a$.*

$$\text{Se } \int_a^\infty |f| \text{ converge então } \int_a^\infty f \text{ tambem converge}$$

Dem. Sejam f^+ e f^- as funções definidas por

$$f^+ = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} (\geq 0), \qquad \text{Parte Positiva de } f$$

$$f^- = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} (\geq 0), \qquad \text{Parte Negativa de } f$$

Temos então

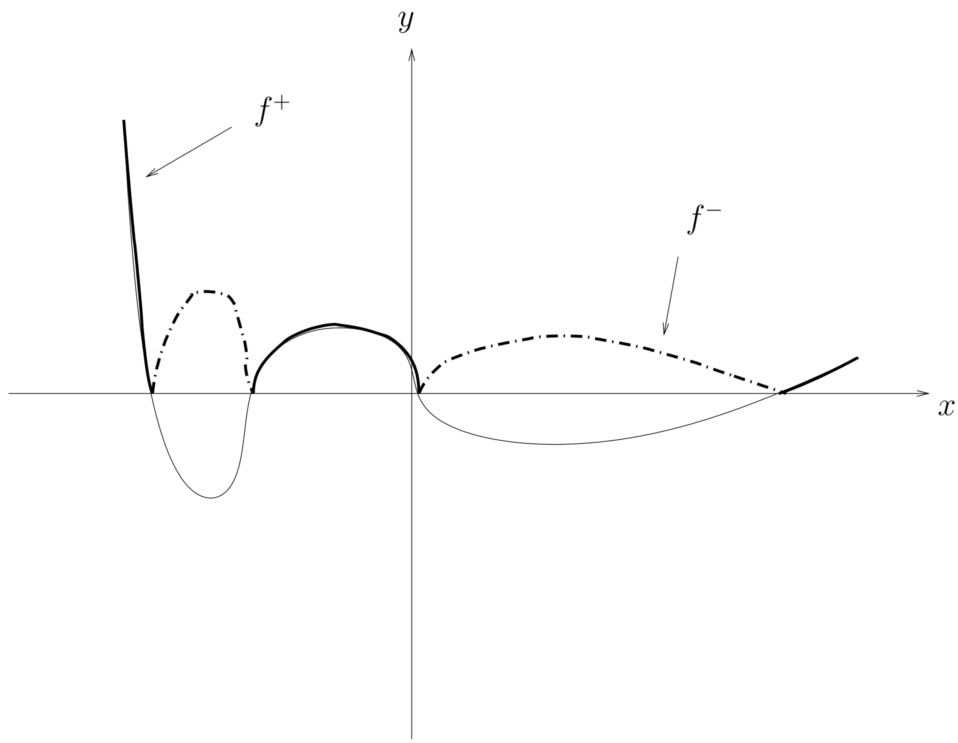

Figure 21: Parte Positiva ($f+$) e Parte Negativa ($f-$) de f

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

e como tanto f^+ como f^- são positivas,

$$|f(x)| \geq f^+ \qquad \text{e} \qquad |f(x)| \geq f^-$$

então a convergência de $\int_a^\infty |f|$ e o critério de majoração implicam a convergência de $\int_a^\infty f^+$ e de $\int_a^\infty f^-$. Finalmente, como $f = f^+ - f^-$, então $\int_a^\infty f$ é convergente através da Proposição 3.2. ■

Observação 3.2

De um modo geral, não é verdade que a convergência de $\int_a^\infty f$ implique a convergência de $\int_a^\infty |f|$.

Definição 3.2

Se $\int_a^\infty |f|$ converge diz-se que $\int_a^\infty f$ é **absolutamente convergente**.

Se $\int_a^\infty f$ converge mas $\int_a^\infty |f|$ **não** converge, diz-se que $\int_a^\infty f$ é **simplesmente convergente**.

Seguidamente provamos um resultado que nos permitirá apresentar (pelo menos) um integral simplesmente convergente.

Teorema 3.5 *Sejam u e v contínuas com derivada contínua em $[a,\infty[$. Se u é decrescente com $\lim_{x\mapsto\infty} u(x) = 0$ e v é limitada em $[a,\infty[$, então*

$$\int_a^\infty uv' \text{ converge}$$

Dem. Tem-se, pelo Teorema da integração por partes,

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x uv' = \lim_{x\mapsto\infty}\Big(u(x)v(x) - u(a)v(a)\Big) - \lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x u'v = -u(a)v(a) - \lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x u'v$$

já que $\lim_{x\mapsto\infty} u(x) = 0$. Resta-nos então mostrar que $\int_a^\infty u'v$ converge, para se obter o resultado. Como

$$|u'(x)v(x)| = |u'(x)||v(x)| \leq M|u'(x)| = -Mu'(x)$$

(porque v é majorada e porque u é decrescente) e porque

$$\int_a^\infty \Big(-Mu'(t)\Big)dt = -M\int_a^\infty u'(t)dt = -M\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x u'(t)dt = -M\lim_{x\mapsto\infty}\Big[u(t)\Big]_a^x =$$

$$= -M\lim_{x\mapsto\infty}\Big[u(t)\Big]_a^x = -M\lim_{x\mapsto\infty}\Big(u(x)-u(a)\Big) = -M\Big(0-u(a)\Big) = Mu(a)$$

provando-se assim que

$$\int_a^\infty uv'$$

converge.

■

Exemplo 3.7

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx \text{ converge}$$

Basta notar que

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\cdot\Big(-\cos(x)\Big)'$$

donde esta integranda está nas condições do Teorema (com $u(x) = \frac{1}{x}$ e $v(x) = -\cos(x)$) donde segue que o integral impróprio em consideração converge.

Vamos agora ver que essa convergência é simples, ou seja que, apesar de, como vimos, $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$ convergir, $\int_0^\infty \Big|\frac{\sin(x)}{x}\Big|dx$ não converge. Consideremos então

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}dx$$

Para x em $[k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{5\pi}{6}]$, $|\sin(x)| \geq \frac{1}{2}$ (ver figura 22), donde

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \int_{k\pi+\frac{\pi}{6}}^{k\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \frac{1}{2}\int_{k\pi+\frac{\pi}{6}}^{k\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{x}dx \geq \frac{1}{2}\frac{1}{k\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{2\pi}{3} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\frac{1}{k\pi+\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{3}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x}dx$$

isto é,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \frac{1}{3}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x}dx$$

donde,

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}\log(n+1) \underset{n\mapsto\infty}{\longmapsto} \infty$$

e portanto,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$

converge simplesmente.

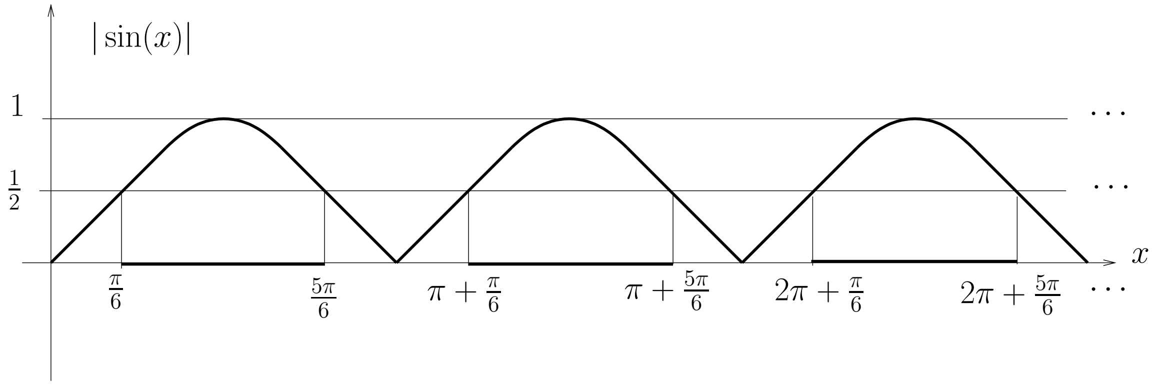

Figure 22: ... aonde $|\sin(x)|$ é maior que $\frac{1}{2}$ ...

3.2 Integrais Impróprios: A função integranda não é limitada

Definição 3.3

Seja f não limitada em $]a,b]$ mas integrável em qualquer subintervalo fechado de $]a,b]$. Suponha-se ainda que existe e é finito

$$\lim_{x\mapsto a^+}\int_x^b f$$

Definimos

$$\int_a^b f = \lim_{x\mapsto a^+}\int_x^b f$$

dizendo que o integral impróprio converge. Se o limite acima não existe dizemos que o integral impróprio diverge.

Analogamente, se f não é limitada em $[a,b[$ mas integrável em qualquer subintervalo fechado de $[a,b[$ e se existe e é finito

$$\lim_{x\mapsto b^-}\int_a^x f$$

definimos

$$\int_a^b f = \lim_{x\mapsto b^-}\int_a^x f$$

dizendo que o integral impróprio converge. Se o limite acima não existe dizemos que o integral impróprio diverge.

Exemplo 3.8

Qual a natureza de

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx \qquad ?$$

Tem-se,

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{x\mapsto 0^+}\Big[\log(t)\Big]_x^1 = \infty$$

Então, $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ diverge.

Qual a natureza de

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad ?$$

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\mapsto 0^+}\Big[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1})\Big]_x^1 = 2$$

e então $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge.

Suponhamos que f está definida em $]a,b[$ e é integravel em qualquer subintervalo fechado de $[a,b]$. Se, para certo c em $]a,b[$,

$$\int_a^c f \text{ e } \int_c^b f$$

forem ambos convergentes, então dizemos que $\int_a^b f$ converge tendo-se

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Definição 3.4

Seja f definida em $]a,\infty[$ integrável em qualquer subintervalo fechado de $]a,\infty[$. Suponha-se ainda que

$$\int_{a^+}^c f \quad \text{e} \quad \int_c^\infty f$$

convergem ambos. Então dizemos que $\int_a^\infty f$ converge, tendo-se

$$\int_a^\infty f = \int_{a^+}^c f + \int_c^\infty f$$

Exemplo 3.9

Qual a natureza de

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}dx \quad ?$$

Como pelo menos um dos integrais

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx \quad \text{e} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

diverge (de facto, divergem ambos, até) então o integral em questão é divergente.

No caso de f ser não limitada "junto" a a podemos converter o integral impróprio de integranda não limitada em integral impróprio sobre intervalo não limitado:

$$\int_a^b f(t)dt = (\text{ fazendo } u = \frac{1}{t-a}, \dots) \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{f(a+\frac{1}{u})}{u^2}du$$

e se f fosse não limitada "junto" a b:

$$\int_a^b f(t)dt = (\text{ fazendo } u = \frac{1}{b-t}, \dots) \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{f(b-\frac{1}{u})}{u^2}du$$

Isso permite-nos desde logo dar os seguintes exemplos:

Exemplo 3.10

Qual a natureza de

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \quad ?$$

Tem-se,

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{u^\alpha}{u^2}du = \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{du}{u^{2-\alpha}}$$

Portanto

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge para} & \alpha < 1 \\ \text{diverge para} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Qual a natureza de

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \quad ?$$

Tem-se,

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{u^\alpha}{u^2} du = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha}}$$

e portanto

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge para} & \alpha < 1 \\ \text{diverge para} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

As conversões acima de integrais imprópríos de integrandas não limitadas para integrais imprópios de integrandas limitadas sobre intervalos não limitados permitem-nos tambem obter nesta secção os analogos dos resultados da secção anterior. Registamos aqui unicamente os analogos do critério de majoração e do limite:

Teorema 3.6 (Critério de majoração) *Sejam f e g positivas e definidas em $]a,b]$ e integráveis em qualquer intervalo $[x,b]$ com $a < x \leq b$. Seja ainda $f(x) \leq g(x)$ em $]a,b]$.*

$$\text{Se } \int_a^b g \quad \text{converge, então} \quad \int_a^b f \quad \text{tambem converge.}$$

$$\text{Se } \int_a^b f \quad \text{diverge, então} \quad \int_a^b g \quad \text{tambem diverge.}$$

Corolário 3.3 (Critério do limite) *Sejam f e g positivas e definidas em $]a,b]$ e integráveis em qualquer intervalo $[x,b]$ com $a < x \leq b$. Suponha-se ainda que $g(x) > 0$ em $]a,b]$ e que existe, em $\overline{\mathbb{R}}$,*

$$l = \lim_{x \mapsto a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Se} \quad l > 0 \quad \text{então} \quad \int_a^b f \quad \text{e} \quad \int_a^b g \text{ têm a mesma natureza} \tag{4}$$

$$\text{Se} \quad l = 0 \quad \text{então} \quad \left[\int_a^b g \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \text{ converge}\right] \tag{5}$$

$$\text{Se} \quad l = \infty \quad \text{então} \quad \left[\int_a^b f \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b g \text{ converge}\right] \tag{6}$$

(Notar tambem a importância dos contrarecíprocos de (5) e (6))