1. Prove que quaisquer que sejam as proposições p, q, r, se tem:
   (a) $p \vee q = q \vee p$ (comutatividade da disjunção)
   (b) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ (associatividade da disjunção)
   (c) $p \wedge q = q \wedge p$ (comutatividade da conjunção)
   (d) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ (associatividade da conjunção)
   (e) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge r) \vee (p \wedge q)$ (distributividade da conjunção a respeito da disjunção)
   (f) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee r) \wedge (p \vee q)$ (distributividade da disjunção a respeito da conjunção)

2. Prove que, quaisquer que sejam as proposições p, q e r, são verdadeiras as proposições:
   (a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$ (regra do contra-recíproco),
   (b) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$,
   (c) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

3. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas onde o domínio das variáveis é: (a) o conjunto dos números reais; e (b) o conjunto dos números naturais.

   $\forall x \quad x^2 + 1 > 1, \qquad \forall x \quad (x > 2 \Rightarrow x > 1), \qquad \forall x, \exists y \quad y = x^2,$
   $\exists y, \forall x \quad y = x^2, \qquad \forall x, y, \exists z \quad x = yz, \qquad \exists x, y \quad (x-y)^2 = x^2 - y^2, \qquad \forall x, y \quad (x-y)^2 = x^2 - y^2$

4. Verifique que as condições seguintes são formalmente equivalentes:

   $\exists y \quad x = 10^y \quad \Leftrightarrow x > 0 \quad (\text{ em } \mathbf{R}), \qquad \forall x, \exists y \quad y = x^2 \quad \Leftrightarrow y \leq 0 \quad (\text{ em } \mathbf{R})$
   $\forall x \quad y \leq x \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \quad (\text{ em } \mathbf{N}), \qquad \forall x, \quad y < x \quad \Leftrightarrow \quad y = y + 1 \quad (\text{ em } \mathbf{N})$
   $\exists z \quad x = y + z, \quad \Leftrightarrow \quad x > y \quad (\text{ em } \mathbf{N})$

5. Mostre que as condições $p(x) \Rightarrow q(x)$ e $\sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ são equivalentes, mas que, em geral, qualquer delas não é equivalente a $q(x) \Rightarrow p(x)$.

6. Escreva a negação de:

   $x > z \Rightarrow |f(x)| < \epsilon \qquad |f(x)| > \epsilon \Rightarrow x > z \qquad \forall x \quad y = x^2 \qquad \exists y \quad y = x^2 \qquad \forall x \forall y z - x = x - y$
   $\exists x \forall y \quad z - x = x - y \qquad \exists x \exists y \quad z - x = x - y \qquad \forall y \exists z \forall x \quad x > z \Rightarrow f(x) > y$
   $\forall y \exists z \forall x \quad x < z \Rightarrow |f(x)| > y$

7. Seja u_n o termo geral de uma sucessão e a um número real. Por definição, a proposição $\lim u_n = a$ é equivalente a
   $$\forall \delta \exists p \forall n (n > p \Rightarrow |u_n - a| < \delta)$$
   onde δ tem por domínio os reais positivos e p e n os naturais. Que proposição caracteriza a negação de $\lim u_n = a$?

8. A sucessão u_n diz-se limitada se, por definição, $\exists k \forall n |u_n| < k$. Defina sucessão ilimitada.
   Será que a condição $\forall n \exists k |u_n| < k$ caracteriza sucessões limitadas?

9. Verifique que, sendo z e ϵ números reais,
   $$\text{se } \forall \epsilon (\epsilon > 0 \Rightarrow |z| > \epsilon), \text{ então } z = 0$$