Cálculo Diferencial e Integral I - Tagus Park **2o. Semestre 2009/2010**
3a. Lista de exercícios **15/03 - 17/03**

1. Mostre por indução que:
   (a) $7^n - 1$ é divisível por 6, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (b) $7^{n+1} - 6n - 7$ é divisível por 36, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$,
   (f) $(1+h)^n \geq 1 + nh$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$ e para qualquer $h \geq 0$, real,
   (g) $a^n - b^n$ é divisível por $a - b$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, dados quaisquer inteiros a, b,
   (h) $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, dado qualquer real $r \neq 1$.

2. Para que valores reais de x são válidas as desigualdades:

$$x^2 - 3x + 2 < 0, \qquad |x-1| < |x+1|, \qquad \left|\frac{x+1}{x}\right| < 6, \qquad |1-x| - x \geq 0$$

$$\left|\frac{x^2 - x}{1+x}\right| > x, \qquad 3x^3 - 2x^2 + 3x > 2$$

3. Considere a sucessão definida por:

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

   (a) Calcule os termos x_1, x_2, x_3,
   (b) Mostre que x_n é decrescente,
   (c) Mostre que $x_n \to 0$.

4. Mostre que:
   (a) $\lim \frac{4+5^{-n}}{2+n^{-2n}} = 2$,
   (b) $\lim \left(\frac{2^{100n+3}}{5^{50n}} - \frac{n^3-n+6}{4n-1+5n^3} \right) = -\frac{1}{5}$,
   (c) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para qualquer $a \in \mathbf{R}$,
   (d) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

5. Mostre que a partir de certa ordem se tem $100n^2 + n + 3 < n^3 - 2n - 1$.

6. Determine em $\mathbf{R}$, o supremo, o ínfimo, o máximo, o mínimo, os majorantes e os minorantes (caso existam) de:
   (a) $\{1, \sin 1, \sin 2\}$,
   (b) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$,
   (c) $\{\frac{a^n}{n!} : n \in \mathbf{N}\}$ com $a \in \mathbf{R}$, tal que $-2 < a < 2$,
   (d) $\{m + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbf{N}\}$,
   (e) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : m, n \in \mathbf{N}\}$,
   (f) $\{n^{(-1)^m} : m, n \in \mathbf{N}\}$.

7. Mostre que se o conjunto dos termos de uma sucessão não tem máximo nem tem mínimo, então a sucessão é divergente.