Cálculo Diferencial e Integral I - Tagus Park **2o. Semestre 2009/2010**
4a. Lista de exercícios **22/03 - 24/03**

1. Determine em $\mathbb{R}$ o interior, a aderência e o derivado dos seguintes conjuntos:

$$[0,1[\cup]2,3] \cup \{6,10\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 9\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < |x-3| \leq 5\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 > x\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-1| \geq |x|\} \qquad \{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{x-1}{x+3} > \frac{x}{x+2}\} \qquad (\mathbb{R}\backslash]-1,+\infty[) \cap \mathbb{Q}$$

2. O mesmo de 1. para os conjuntos da 3a. lista exercício 6.

3. Calcule, se existirem, ou prove que não existem, os limites em $\mathbb{R}$ das seguintes sucessões:

$$\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}} \qquad \cos(n\pi)\sin(n\pi) \qquad \cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} \qquad \left(2+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \frac{n^e}{1-n^e} \qquad \frac{e}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) \qquad \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{3}} \qquad \left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{n/4} \qquad 1+\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n n}{2n+1}$$
$$\cos(n\pi)+(-1)^{n+1} \qquad \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

4. Dê um exemplo de uma sucessão (x_n) em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \to 0$ e nx_n tem duas subsucessões com limites distintos.

5. Quando possível dê exemplos de sucessões $(x_n), (y_n), (z_n)$ em $\mathbb{R}$ tais que $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$, $z_n \to 0$, e que verifiquem:

$$x_n + y_n \to 1 \qquad x_n + y_n \to -\infty \qquad x_n + z_n \to 1 \qquad x_n z_n \to 0 \qquad \frac{x_n}{z_n} \to 1$$

6. Mostre que:

$$\lim\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1 \qquad \lim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=\infty$$

7. Considere a sucessão definida por recorrência por:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}$$

   (a) Encontre um minorante para o conjunto dos seus termos.
   (b) Mostre que é decrescente
   (c) Mostre que é convergente
   (d) Calcule o seu limite
   (e) Mostre por indução que $x_n = \frac{1}{n!}$