Cálculo Diferencial e Integral I - Tagus Park **2o. Semestre 2009/2010**
5a. Lista de exercícios **29/03 - 31/03**

1. Sejam a e b números reais não-negativos. Calcule $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n}$
2. Considere a sucessão cujos termos são $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$
   (a) Mostre que é crescente
   (b) Mostre que é limitada superiormente
   (c) Mostre que é convergente e que tem por limite 2.
3. Seja c um real positivo. Calcule, caso exista, o limite da sucessão definida por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{c}$
4. Estude do ponto de vista da monotonia e convergência a sucessão:
$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 1$$
5. Seja x_n o número de primos distintos na decomposição de n em factores primos.
   (a) Calcule x_{30} e x_{900}.
   (b) (x_n) é limitada?
   (c) $x_n \longrightarrow +\infty$?
   (d) Mostre que $\frac{x_n}{n} \longrightarrow 0$.
6. Mostre que a existência de limite para as sucessões x_{2n}, x_{2n+1} e x_{3n} implica a convergência de x_n.
7. Calcule
   (a) $\lim[\frac{1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1})]$
   (b) $\lim \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$
   (c) $\lim \frac{\log 1+\log 2+\log 3+\cdots+\log n}{n \log n}$
   (d) $\lim \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$
   (e) $\lim \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}$
8. Mostre que
$$\log n! \sim \log n^n \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \sim \frac{n^4}{4} \qquad \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$
9. Mostre que se $a_{n+1} - a_n \to \alpha$, então $\frac{a_n}{n} \to \alpha$
10. Seja (u_n) uma sucessão tal que $0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Determine $\lim u_n$.
11. Seja $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $x_n \to 0$ então $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \to 0$.