1. Determine para que valores de x convergem as seguintes séries e calcule a sua soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(1-|x|)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{|x|}$$

2. Determine a natureza das seguintes séries e a soma das que são convergentes:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)(2n-1)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}2^{-(3n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{3}{2^n}\right) \qquad \frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 19}+\cdots$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

3. Mostre que se $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

4. Estude quanto à convergência simples e absoluta as séries de termos gerais:

$$\frac{(-1)^n}{n+\log n} \qquad (-1)^n\frac{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}{n} \qquad (-1)^n\frac{n}{n+2} \qquad \cos(\pi n)$$

$$(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right) \qquad (-1)^n\frac{\log n}{n} \qquad (-1)^n\tan\frac{1}{n}$$

5. Mostre que, se $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e b_n é uma sucessão limitada, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente.

6. Justifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:
   (a) Um número inteiro pode ser a soma de uma série geométrica de racionais;
   (b) Um número irracional pode ser a soma de uma série geométrica de racionais;
   (c) A soma de dois irracionais é um irracional;
   (d) Se $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ é convergente;
   (e) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ é convergente;
   (f) Se $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ é convergente;
   (g) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e $a_n \neq -1, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ é também absolutamente convergente;
   (h) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergente de termos positivos , então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ é convergente.