1. Determine a natureza das séries cujos termos gerais são:

$$(a)\ \frac{n}{n^2+n-1} \qquad (b)\ \frac{1}{\sqrt{n(n+10)}} \qquad (c)\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad (d)\ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \qquad (e)\ \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(f)\ \frac{2^n}{1+3^n} \qquad (g)\ \frac{1}{n^2\sin\frac{1}{n}} \qquad (h)\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad (i)\ \frac{(1000)^n}{n!} \qquad (j)\ \frac{n}{\sin n}$$

$$(k)\ n^2e^{-\sqrt{n}} \qquad (l)\ n^2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \qquad (m)\ \left(1+(-1)^n\right)^n \qquad (n)\ \frac{e^n n!}{n^n} \qquad (o)\ \frac{1}{(\log n)^p} \quad p\in\mathbb{R}$$

$$(p)\ \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \qquad (q)\ \frac{1+3n}{2\sqrt{n}\,(n^2-1)} \qquad (r)\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n+3)} \qquad (s)\ \frac{n^{1000}}{(1,001)^n}$$

$$(t)\ \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \qquad (u)\ \frac{\sqrt{n}\log n}{n^2+1} \qquad (v)\ \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\log n}$$

2. Determine com erro inferior a $0,01$ a soma das séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n/2}} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

3. Associemos à série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$, onde:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n > 0,\\ 0, & \text{se } a_n \le 0\end{cases} \qquad \text{e} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{se } a_n < 0,\\ 0, & \text{se } a_n \ge 0\end{cases}$$

Mostre que

(a) $a_n = a_n^+ - a_n^-$ e $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

(b) $a_n^+ = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ e $a_n^- = \frac{|a_n|-a_n}{2}$

(c) Se duas das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ são convergentes, as outras duas tambem são.

(d) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é simplesmente convergente, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ são divergentes.

(e) Toda a série simplesmente convergente tem uma infinidade de termos positivos e de termos negativos.

4. Mostre que:

(a) A sucessão $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ é uma sucessão de termos positivos que tende para zero.

(b) A série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n x_n$ é divergente.

(c) Porque é que não se aplica à série anterior o critério de Leibniz?