Cálculo Diferencial e Integral I - Tagus Park **2o. Semestre 2009/2010**
8a. Lista de exercícios **26/04 - 28/04**

1. Mostre que, sendo $f, g : X \to \mathbf{R}$ contínuas em $a \in X$,
   (a) a função $f + g$ é contínua em a,
   (b) a função fg é contínua em a,
   (c) a função $h : X \to \mathbf{R}$ definida por $h(x) = |f(x)|$ é contínua em a,
   (d) a função $h : X \to \mathbf{R}$ definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em a, se $g(a) \neq 0$.
2. (a) Mostre que a função identidade $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = x$, é contínua em qualquer ponto $x_0 \in \mathbf{R}$.
   (b) Mostre que se $f : X \to \mathbf{R}$, é constante em X, então f é contínua.
   (c) Aplique as duas alíneas anteriores e também $1.a$ e $1.b$ para mostrar que qualquer polinómio é uma função contínua.
3. Sejam $X, Y, Z \subset \mathbf{R}$, $g : X \to Y$, e $f : Y \to Z$, com g contínua em a e f contínua em $g(a)$. Mostre que $f \circ g$ é contínua em a.
4. Estude quanto à continuidade as seguintes funções:
   (a) $|x|e^{-|x|}$
   (b) $|x^3|$
   (c) $f(x) = x \log \sin^2 x$
   (d) $\frac{1}{1-e^{1/x}}$
   (e) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} - 2x$ para $x \neq 0$, com $f(0) = 0$.
5. Estude quanto à continuidade uniforme as seguintes funções nos conjuntos indicados:
   (a) x, x^2, $\frac{1}{x^2}$, $\sqrt{x}$, em $]0, +\infty[$, $]0, 1[$ e $[0, 1]$.
   (b)
   $$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \text{em }]a, b[\text{ com } -\infty \leq a < b \leq +\infty$$
6. Analise a existência de um prolongamento contíuo à origem,
   (a) da função do exercício $4.d$
   (b) da função $f(x) = \frac{x^4+x^2}{x^4+3x}$
7. Calcule as rectas assimptotas aos gráficos das funções:
   $$(a) \quad \frac{x^3+1}{x^2} \qquad\qquad (b) \quad \frac{x}{1+x^2} \qquad\qquad (c) \quad \frac{x^2-4}{x^2-9}$$
8. Determine todas as funções contínuas $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, contínuas em $x = 0$, tais que $f(0) = 1$ e $f(3x) = f(x)$.
9. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é contínua e todos os valores de f estão em $[a, b]$, então existe $x \in [a, b]$ tall que $f(x) = x$.
10. Mostre que não existem funções $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, contínuas no ponto $x = 1$ tais que $f(x^2) + f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ (excepto a função idênticamente nula).