Cálculo Diferencial e Integral I - Tagus Park **2o. Semestre 2009/2010**
1o. Teste **A** **Resolução** **24/03/2010**
Justifique as suas respostas

1. Considere as proposições p, q e r. Construa a tabela de verdade de:

$$[(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \quad \wedge \quad (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{r})] \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{r}).$$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$	$\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{r}$	$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{r}$	$(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{r})$	$[(\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{r})] \Rightarrow (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{r})$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

2. Considere a proposição

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \textit{é convergente} \qquad \Rightarrow \qquad \lim u_n = 0$$

Dessa proposição escreva (i) o contra-recíproco, (ii) a sua negação.

(i)

$$\text{Se } \lim u_n \neq 0 \quad \text{ou não existir} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \textit{não é convergente}$$

(ii)

$$\sim \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \textit{é convergente} \qquad \Rightarrow \qquad \lim u_n = 0 \right] \Leftrightarrow$$

$$\sim \left[\sim \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \textit{é convergente} \qquad \vee \qquad \lim u_n = 0 \right] \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \textit{é convergente} \qquad \wedge \qquad \left(\lim u_n \neq 0 \quad \text{ou não existe} \right)$$

3. Interprete geometricamente o seguinte subconjunto de $\mathbf{R}^2$:

$$F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| + |y| > 1\}$$

$$\begin{aligned} & |x|+|y|>1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 1-|y| \quad \Leftrightarrow \quad x > 1-|y| \vee x < -1+|y| \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & |y| > 1-x \vee |y| > 1+x \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & y > -x+1 \vee y < x-1 \vee y > x+1 \vee y < -x-1 \end{aligned}$$

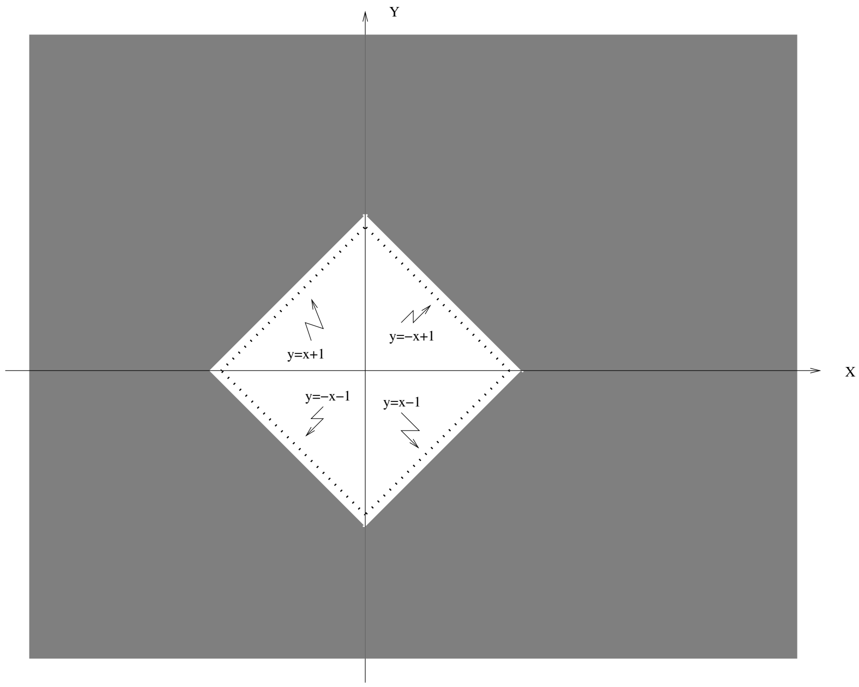

Figure 1: A região a sombreado é (parte da) interpretação geométrica do conjunto

4. **Por indução**, mostre que se tem, para todo o $n \in \mathbf{N}$:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(i)

$$\text{Para } n=1 \quad 1+2+\cdots+n = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$$

Portanto com $n=1$ obtemos uma proposição verdadeira.

(ii)

Supomos que, para certo $n \in \mathbb{N}$, é verdade que $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Então:

$$(1+2+3+\cdots+n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=$$
$$=(n+1)\frac{n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

mostrando assim que a proriedade é hereditária. Como já tínhamos provado que para $n=1$ se obtem uma proposição verdadeira, fica provado para todo o $n\in\mathbb{N}$ que

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

5. Calcule todas as raízes de $3x^3-2x^2-3x+2$.

$$3x^3-2x^2-3x+2=(3x-2)(x^2-1)=(3x-2)(x+1)(x-1)$$

donde as raízes são $-1, \frac{2}{3}, 1$.

(Alternativamente, procurar raízes racionais usando o critério de Gauss e depois usar Ruffini ...)

6. Considere o conjunto

$$X=\left\{x\in\mathbb{R}\,:\,\left|\frac{x^2-x}{1+x}\right|\le x\right\}$$

Apresente o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de X. Apresente ainda, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de X.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x^2-x}{1+x}\right|\le x \quad\Leftrightarrow\quad -x\le\frac{x^2-x}{1+x} \quad\wedge\quad \frac{x^2-x}{1+x}\le x \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad 0\le\frac{x^2-x}{1+x}+x \quad\wedge\quad \frac{x^2-x}{1+x}-x\le 0 \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad 0\le\frac{x^2-x+x+x^2}{1+x} \quad\wedge\quad \frac{x^2-x-x-x^2}{1+x}\le 0 \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad 0\le\frac{2x^2}{1+x} \quad\wedge\quad \frac{-2x}{1+x}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0\le\frac{x^2}{1+x} \quad\wedge\quad \frac{x}{1+x}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad (x\ge -1\vee x=0) \quad\wedge\quad \frac{x}{1+x}\ge 0
\end{aligned}$$

Donde

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$1+x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x}{1+x}$	$+$	$+$	SS	$-$	0	$+$	$+$

$$X = \left(\{0\} \cup]-1, +\infty[\right) \cap [0, +\infty[= [0, +\infty[$$

Então

$$X^+ = \emptyset \qquad X^- =]-\infty, 0] \qquad \inf X = 0 = \max X$$

e $\sup X$ e $\max X$ não existem.

7. Considere a sucessão

$$u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Calcule o seu limite se existir, ou mostre que este não existe.

$$u_{4n} = \sin\left(\frac{4n\pi}{4}\right) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$$

$$u_{8n+2} = \sin\left(\frac{(8n+2)\pi}{4}\right) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$$

Como obtivemos duas subsucessões com limites distintos, a sucessão (u_n) não converge.