Cálculo Diferencial e Integral I - Tagus Park **2o. Semestre 2009/2010**
3o. Teste - RESOLUÇÃO **A** **09/06/2010**
Justifique as suas respostas

1. Calcule uma primitiva de
$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

Resposta:
$$\mathbf{P}(x^2 + 3x - 2) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + c$$
Uma primitiva de f é então, por exemplo:
$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$$

2. Calcule uma primitiva de
$$g(x) = x \cos x$$

Resposta:
$$\mathbf{P}(x \cos x) = x \sin x - \mathbf{P}(1 \cdot \sin x) = x \sin x + \cos x + c$$
Uma primitiva de g é então, por exemplo:
$$x \sin x + \cos x + \pi$$

3. Calcule uma primitiva de
$$h(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

Rsposta:
$$\frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{x^2 + 3}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$
em que
$$A = \left.\frac{x^2 + 3}{(x + 1)(x^2 + 1)}\right|_{x=1} = \frac{1^2 + 3}{(1 + 1)(1^2 + 1)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$B = \left.\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+1)}\right|_{x=-1} = \frac{(-1)^2+3}{(-1-1)((-1)^2+1)} = \frac{4}{-4} = -1$$

Substituindo os valores obtidos para A e B:

$$\frac{x^2+3}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

multiplicando por x à direita e à esquerda da igualdade:

$$x\frac{x^2+3}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} + \frac{Cx^2+Dx}{x^2+1}$$

e tomando limite quando $x \mapsto +\infty$, obtem-se

$$0 = 1 - 1 + C + 0$$

donde

$$C = 0$$

Substituímos o valor de C acima e calculamos para $x = 0$:

$$\left.\frac{x^2+3}{(x^2-1)(x^2+1)}\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{x-1}\right|_{x=0} - \left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=0} + \left.\frac{D}{x^2+1}\right|_{x=0}$$

obtendo:

$$\frac{3}{(-1)\cdot 1} = -1 - 1 + D$$

donde:

$$D = -1$$

Então

$$\mathbf{P}\frac{x^2+3}{(x^2-1)(x^2+1)} = \mathbf{P}\frac{1}{x-1} - \mathbf{P}\frac{1}{x+1} - \mathbf{P}\frac{1}{x^2+1} = \ln|x-1| - \ln|x+1| - \arctan x + c$$

Então, uma primitiva de h é, por exemplo:

$$\ln|x-1| - \ln|x+1| - \arctan x - 73$$

4. Calcule a área da figura plana delimitada pelas linhas dadas por:

$$y = e^x \qquad y = e^{-x} \qquad x = 0 \qquad x = 2$$

Resposta:

$$\int_0^2 \left(e^x - e^{-x}\right)dx = \Big[e^x + e^{-x}\Big]_0^2 = e^2 + e^{-2} - 2$$

5. Determine o volume do sólido gerado por rotação em torno do eixo dos XX, das regiões delimitadas pelas seguintes curvas:

$$y = x^2 \qquad y = 0 \qquad x = 2$$

Resposta:

$$\pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{1}{5} \Big[x^5 \Big]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$. Mostre que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

Resposta: f é um polinómio logo é uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Em particular f é contínua em qualquer intervalo fechado, e diferenciável em qualquer intervalo aberto. Está portanto nas condições do Teorema de Bolzano e do Teorema de Rolle para qualquer intervalo $[a, b]$.

$$f(0) = 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \qquad\qquad f(1) = 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 - 1 = 5 > 0$$

Então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, f tem, pelo menos, uma raiz no intervalo aberto $]0, 1[$.

Se f tivesse mais do que uma raiz, então, pelo Teorema de Rolle, f teria pelo menos uma raiz da sua derivada.

No entanto,

$$f'(x) = 6x^2 + 4 \geq 6 \cdot 0 + 4 > 0$$

donde f' não tem nenhuma raiz, donde f só pode ter uma raiz. Como já provámos que f tem pelo menos uma raiz, então f tem exactamente uma raiz.

7. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dados os números reais $a < b$, calcule as somas de Darboux superiores e inferiores de f relativas a uma decomposição genérica d do intervalo $[a, b]$. O que conclui quanto à integrabilidade de f sobre $[a, b]$?

Resposta: Seja d uma decomposição de $[a, b]$:

$$d = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

$$m_k(f) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = -1 \qquad\qquad \text{para todo o } k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$M_k(f) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 1 \qquad\qquad \text{para todo o } k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Então:

$$s_d(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1) \cdot (x_k - x_{k-1}) = -(b-a)$$

$$S_d(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a \Big(\neq -(b-a) \Big)$$

Por outro lado,

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\, s_d(f) \mid d \text{ é decomposição de } [a,b]\} = \sup\{-(b-a)\} = -(b-a)$$

e

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\, S_d(f) \mid d \text{ é decomposição de } [a,b]\} = \sup\{b-a\} = b-a$$

então

$$\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$$

e portanto f não é integrável em $[a,b]$ já que por definição de integrabilidade de uma função g sobre um intervalo $[a,b]$,

$$\underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g$$