Notas sobre Integrais Impróprios em $\mathbb{R}$

Pedro Lopes
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
1o. Semestre 2009/2010

Estas notas constituem um material de apoio ao curso de Cálculo Diferencial e Integral II para as licenciaturas em Engenharia Informática, Engenharia Electrónica, Engenharia de Redes e Comunicações, e Engenharia de Gestão e Industrial do Instituto Superior Técnico - Tagus Park, no 1o. semestre de 2009/2010 e não pretendem ser um substituto dos manuais escolares disponíveis.

1 Integrais Impróprios

Integrais impróprios são aqueles em que se realiza a integração de uma função (integrável) sobre um intervalo não limitado, como por exemplo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

ou quando o intervalo de integração é limitado mas a função integranda não é limitada, como por exemplo

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

ou finalmente quando nem o intervalo de integração é limitado nem a função integranda é limitada.

1.1 Integrais Impróprios: Intervalo de integração não é limitado

Comecemos então por estudar os integrais impróprios de funções integráveis sobre intervalos não limitados.

Definição 1.1

Seja f uma função definida em $[a, \infty[$ e integrável em todo o intervalo $[a, x]$ qualquer que seja o $x > a$. Se existe

$$\lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x f(t) dt$$

definimos

$$\int_a^\infty f(t) dt \stackrel{def.}{=} \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x f(t) dt$$

dizendo, então, que $\int_a^\infty f(t)dt$ é um integral impróprio convergente.

Exemplo 1.1

a) $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} dt = \lim_{x \mapsto \infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \mapsto \infty} \Big[\log(t)\Big]_1^x = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(\log(x) - \log(1)\Big) = \lim_{x \mapsto \infty} \log(x) = \infty$$

Então $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$ diverge.

b) $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \mapsto \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \mapsto \infty} \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^x = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(-\frac{1}{x} - \big(-\frac{1}{1}\big)\Big) = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(-\frac{1}{x} + 1\Big) = 1$$

Então $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$ converge.

Graficamente:

Se f é integrável em qualquer subintervalo fechado e limitado de $]-\infty, a]$ (como por exemplo, qualquer função contínua em $\mathbb{R}$) faz sentido considerar

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \int_x^a f(t) dt$$

Caso este limite exista definimos

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt \stackrel{def.}{=} \lim_{x \mapsto -\infty} \int_x^a f(t) dt$$

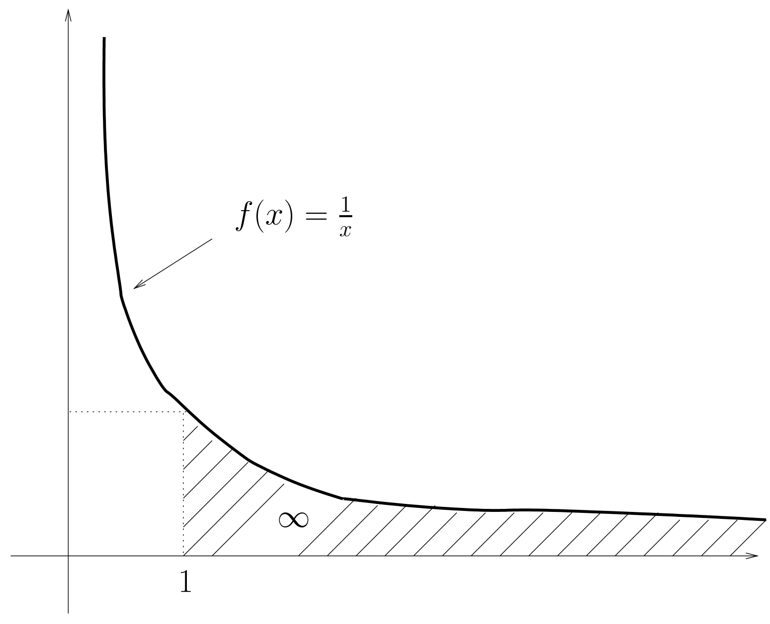

Figure 1: Área infinita

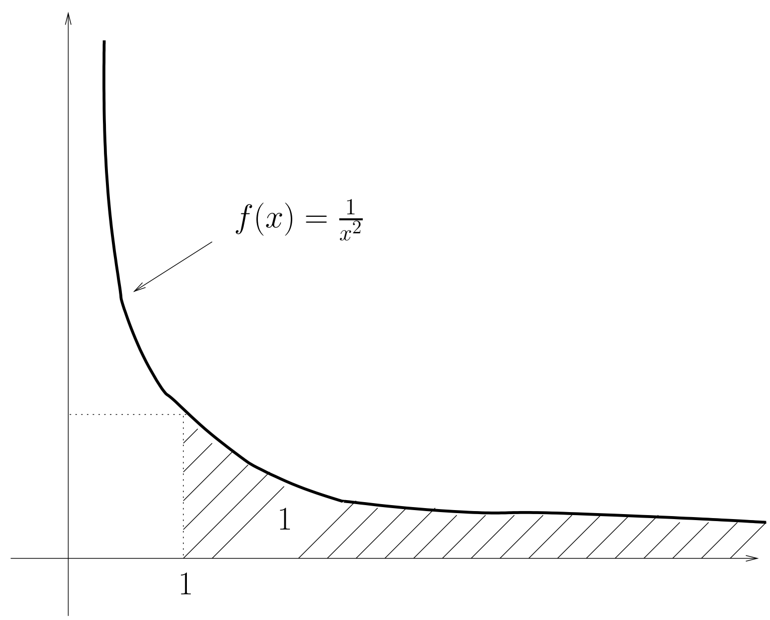

Figure 2: Área finita

dizendo-se então que este integral impróprio é convergente. De notar que o estudo da natureza destes integrais (isto é, se são ou não convergentes) se reduz ao estudo da natureza de integrais do tipo $\int_a^\infty g(t)dt$ já que

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x\mapsto -\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt = (u=-t,\dots) \lim_{x\mapsto -\infty} \int_{-x}^{-a} f(-u)\big(-du\big) = \lim_{x\mapsto -\infty} \int_{-a}^{-x} f(-u)du =$$
$$= \lim_{x\mapsto \infty} \int_{-a}^{x} f(-u)du$$

Por outro lado se

$$\int_0^{\infty} f(t)dt \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{0} f(t)dt$$

forem convergentes, diremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

é convergente.

Proposição 1.1 *Seja f definida em $[a,\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x > a$. Seja λ uma constante real não nula. Então, os integrais,*

$$\int_a^{\infty} f \quad e \quad \int_a^{\infty} \lambda f$$

convergem ambos ou divergem ambos - isto é, têm ambos a mesma natureza. Em caso de convergência, tem-se ainda,

$$\int_a^{\infty} \lambda f = \lambda \int_a^{\infty} f$$

Dem. Notando que, caso um dos seguintes limites exista, se tem,

$$\lambda \cdot \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x f = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(\lambda \cdot \int_a^x f \Big) = \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x \big(\lambda \cdot f \big)$$

o que implica que qualquer um dos outros limites tambem tem que existir, então a convergência de um integral implica a convergência do outro integral. Por outro lado, se um dos integrais diverge então o outro integral tambem tem que divergir. De facto como acabámos de ver, se um dos integrais converge então um dos limites acima existe o que implica que os outros limites tambem existam. ■

Proposição 1.2 *Sejam f e g definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x > a$. Se*

$$\int_a^{\infty} f \quad e \quad \int_a^{\infty} g$$

convergem, então,

$$\int_a^{\infty} \big(f+g\big)$$

tambem converge e tem-se

$$\int_a^{\infty} \big(f+g\big) = \int_a^{\infty} f + \int_a^{\infty} g$$

Dem. Tem-se,

$$\lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x \big(f+g\big) = \lim_{x \mapsto \infty} \left(\int_a^x f + \int_a^x g \right) = \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x f + \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x g = \int_a^{\infty} f + \int_a^{\infty} g$$

ou seja, existe o limite

$$\lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x \big(f+g\big)$$

o que quer dizer, por definição, que o integral impróprio da integranda $f+g$ converge tendo-se ainda

$$\int_a^{\infty} \big(f+g\big) = \int_a^{\infty} f + \int_a^{\infty} g$$

■

Observação 1.1

Se $\int_a^\infty f$ e $\int_a^\infty g$ **não** convergem então a natureza do integral impróprio da soma $f+g$ tanto pode ser convergente como divergente:

Exercício 1.1

Qual a natureza de $\int_1^\infty \big(f+g\big)$ quando

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{x}=g(x) \qquad\qquad b)\quad f(x)=\frac{1}{x}=-g(x)\quad ?$$

Proposição 1.3 *Seja f definida em $[a,\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x>a$. Então, para $c>a$,*

$$\int_a^\infty f \quad e \quad \int_c^\infty f$$

têm a mesma natureza e, em caso de convergência,

$$\int_a^\infty f=\int_a^c f+\int_c^\infty f$$

Dem. Analogamente à s demonstrações anteriores, notando que

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f=\lim_{x\mapsto\infty}\Big(\int_a^c f+\int_c^x f\Big)=\int_a^c f+\lim_{x\mapsto\infty}\int_c^x f$$

em que, na última igualdade, $\int_a^c f$ "passa para fora do limite", já que não depende de x (que é a variável sobre a qual se está a calcular o limite). ■

Exemplo 1.2

Seja

$$f(x)=\begin{cases} e^{x\sqrt{\tan(e^x)}}, & 0<x<10^{100} \\ \frac{1}{x^2}, & x\geq 10^{100}\end{cases}$$

Então, $\int_0^\infty f$ é convergente porque

$$\int_{10^{100}}^\infty \frac{1}{t^2}dt$$

é convergente (como vimos atrás).

Teorema 1.1 (Integração por partes) *Se u e v são funções contínuas com derivada contínua em $[a,\infty[$, e*

$$Se \int_a^\infty u'v \quad converge\ e \quad \lim_{x\mapsto\infty}\Big[uv\Big]_a^x \quad é\ finito$$

então,

$$\int_a^\infty uv' \quad converge$$

e tem-se

$$\int_a^\infty uv'=\lim_{x\mapsto\infty}\Big[uv\Big]_a^x-\int_a^\infty u'v$$

Dem. Omitida. ■

Teorema 1.2 (Integração por substituição) *Seja f definida em $[a,\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x>a$. Seja φ uma bijecção diferenciável de $[\alpha,\infty[$ sobre $[a,\infty[$. Então,*

$$\int_a^\infty f(t)dt \quad e \quad \int_a^\infty f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt$$

têm a mesma natureza e, em caso de convergência, são iguais.

Dem. Omitida. ■

O estudo dos integrais impróprios tem algumas semelhanças com o estudo das séries. Em particular, dado um integral impróprio, pretendemos ser capazes de saber se ele converge ou não (muitas vezes mais do que saber o valor desse integral - em caso de convergência). Para isso, vamos ter, por um lado, uma colecção de funções cuja natureza dos respectivos integrais impróprios vai ser conhecida e por outro lado, vamos ter resultados que nos permitem relacionar a natureza de dois integrais impróprios. Assim, quando quisermos analisar a natureza de um novo integral impróprio, tentamos relacioná-lo com outros de natureza já conhecida através de resultados como o seguinte:

Teorema 1.3 (Critério de majoração) *Sejam f e g positivas e definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x>a$. Seja ainda $f(x)\le g(x)$ para todo o $x>a$.*

$$\text{Se } \int_a^\infty g \quad \text{converge, então} \quad \int_a^\infty f \quad \text{tambem converge.}$$

$$\text{Se } \int_a^\infty f \quad \text{diverge, então} \quad \int_a^\infty g \quad \text{tambem diverge.}$$

Dem. Começamos por observar que

$$F(x)=\int_a^x f$$

é crescente já que $f>0$. Assim, o limite

$$\lim_{x\mapsto\infty} F(x)=\int_a^\infty f$$

existe **em** $\overline{\mathbb{R}}$, podendo portanto ser infinito. Seguidamente mostramos que se $\int_a^\infty g$ converge, então a função F é majorada e que portanto o referido limite é finito, ou seja, a convergência de $\int_a^\infty g$ implica a convergência de $\int_a^\infty f$. De facto, como $f(t)\le g(t)$ para todo o $t\ge a$, então $\int_a^x f\le\int_a^x g$, donde,

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f\le\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x g<\infty$$

A segunda afirmação do teorema é o contrarecíproco da afirmação que acabámos de provar. ■

Exemplo 1.3

Qual a natureza de

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4} \quad ?$$

Comecemos por

Exemplo 1.4

Qual a natureza de

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

(em que α é um parâmetro real)? Separemos o caso $\alpha=1$:

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt=\lim_{x\mapsto\infty}\Big[\log(t)\Big]_1^x=\lim_{x\mapsto\infty}\log\Big(\frac{x}{1}\Big)=\infty$$

donde $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ com $\alpha=1$ é divergente. Analisemos agora para $\alpha\neq 1$:

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt=\lim_{x\mapsto\infty}\Big[\frac{1}{-\alpha+1}t^{-\alpha+1}\Big]_1^x=\lim_{x\mapsto\infty}\frac{1}{-\alpha+1}\big(x^{-\alpha+1}-1\big)$$

donde

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{para } \alpha > 1 \\ \infty & \text{para } \alpha < 1 \end{cases}$$

Assim,

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \text{converge para} & \alpha > 1 \\ \text{diverge para} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Então para se averiguar a natureza de $\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ notamos que

$$\frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{t^4}$$

e que $\frac{1}{t^4}$ é integranda de um integral impróprio convergente - $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ com $\alpha = 4 > 1$. Pelo critério de majoração $\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ é convergente.

Corolário 1.1 *Sejam f e g positivas e definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x > a$. Suponha-se ainda que $g(x) > 0$ para todo o $x > a$ e que existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que*

$$c_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq c_2 \qquad \textit{para todo o } x > a$$

Então,

$$\int_a^\infty f \quad e \quad \int_a^\infty g$$

têm a mesma natureza.

Dem.

$$c_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq c_2 \qquad \text{para todo o } x > a$$

é equivalente a

$$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x) \qquad \text{para todo o } x > a$$

Se $\int_a^\infty f$ converge então, pelo critério de majoração $\int_a^\infty c_1 g$ tambem converge donde $\big(c_1\big)^{-1}\int_a^\infty c_1 g = \int_a^\infty g$ tambem converge. Reciprocamente, se $\int_a^\infty g$ converge então $\int_a^\infty c_2 g$ tambem converge e pelo critério de majaoração $\int_a^\infty f$ converge. Analogamente para integrais divergentes. ■

Corolário 1.2 (Critério do limite) *Sejam f e g positivas e definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x > a$. Suponha-se ainda que $g(x) > 0$ para todo o $x > a$ e que existe, em $\overline{\mathbb{R}}$,*

$$l = \lim_{x\mapsto\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\textit{Se} \quad l > 0 \quad \textit{então} \quad \int_a^\infty f \quad e \quad \int_a^\infty g \ \textit{têm a mesma natureza} \tag{1}$$

$$\textit{Se} \quad l = 0 \quad \textit{então} \quad \left[\int_a^\infty g \quad \textit{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^\infty f \ \textit{converge}\right] \tag{2}$$

$$\textit{Se} \quad l = \infty \quad \textit{então} \quad \left[\int_a^\infty f \quad \textit{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^\infty g \ \textit{converge}\right] \tag{3}$$

(Notar a importância dos contrarecíprocos de (2) e (3))

Dem. $l = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ é equivalente a dizer, por definição de limite, que

$$\text{Para todo o } \epsilon > 0 \text{ existe pelo menos um } \delta > 0 \text{ tal que, sempre que } x > \frac{1}{\delta} \text{ então } \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \epsilon$$

e desembaraçando de módulos e reescrevendo esta última expressão

$$\text{Para todo o } \epsilon > 0 \text{ existe pelo menos um } \delta > 0 \text{ tal que, sempre que } x > \frac{1}{\delta} \text{ então } l - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \epsilon$$

Caso (1): $l > 0$. Tomando $\epsilon = \frac{l}{2}\big(> 0\big)$, há-de existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{com} \quad x > \delta \quad \text{se tenha } \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3l}{2}$$

Então, estamos nas condições do Corolário anterior com $c_1 = \frac{l}{2}$ e $c_2 = \frac{3l}{2}$. Segue-se que os integrais impróprios em questão têm a mesma natureza.

Caso (2): $l = 0$. Tomando $\epsilon = 1\big(> 0\big)$, há-de existir $\delta > 0$ tal que

$$\text{com} \quad x > \delta \quad \text{se tenha } -1 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$$

Como as funções são positivas então a segunda desigualdade acima pode-se reescrever na forma

$$f(x) \leq g(x)$$

Então pelo critério de majoração, se $\int_a^\infty g$ converge, então $\int_a^\infty f$ tambem converge.

Caso (3): $l = \infty$ - fica como exercício. ■

Exemplo 1.5

Qual a natureza de

$$a) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}dx \quad ?$$

Considerando a função integranda, que é uma função racional em x, notamos que para x "muito grande" o comportamento do polinómio no numerador é "dado" por x^2, enquanto que o do polinómio no denominador é "dado" por x^3. Como

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}}{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x^2}}{\frac{3x^3+5x+1}{x^3}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{3+5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+0}{3+0+0} = \frac{1}{3} > 0$$

então, pelo critério do limite, os integrais impróprios

$$\int_1^\infty \frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

têm a mesma natureza (notar que $\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^3}$). Como $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ é integral impróprio divergente (ver exemplo 1.1), então o integral impróprio em estudo tambem é divergente.

$$b) \quad \int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^3}dx \quad ?$$

Comparemos a integranda $\frac{\log(x)}{x^3}$ com $\frac{1}{x^3}$ para subsequentemente tentarmos aplicar o critério do limite:

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{\log(x)}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\mapsto\infty} \log(x) = \infty$$

o que não nos dá, neste caso em particular, nenhuma indicação sobre a natureza do integral em estudo. Comparemos então a integranda em causa com $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\mapsto\infty}\frac{\frac{\log(x)}{x^3}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\mapsto\infty}\frac{\log(x)}{x}=0$$

(use Cauchy...) e então pelo critério do limite, o integral impróprio em questão é convergente.

$$c)\qquad \int_1^\infty e^{-x^2}dx \quad ?$$

Para resolver este exemplo, comecemos por estabelecer a natureza de mais uma colecção de integrais impróprios.

Exemplo 1.6

Qual a natureza de

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\alpha t}}$$

(em que α é um parâmetro real)? O caso $\alpha = 0$ corresponde a um integral divergente (exercício). Passemos ao caso $\alpha \neq 0$. Tem-se,

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_0^x \frac{dt}{e^{\alpha t}}=\lim_{x\mapsto\infty}\int_0^x e^{-\alpha t}dt=\lim_{x\mapsto\infty}\left[\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^x=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\mapsto\infty}\left[e^{-\alpha x}-1\right]$$

donde

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_0^x \frac{dt}{e^{\alpha t}}dt=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}, & \text{para } \alpha>0\\ \infty & \text{para } \alpha<0\end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\alpha t}}\qquad \begin{cases}\text{converge para } \alpha>0\\ \text{diverge para } \alpha\leq 0\end{cases}$$

Voltemos então à questão da convergência de

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

Como

$$\lim_{x\mapsto\infty}\frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\mapsto\infty}\frac{1}{e^{x^2-x}}=0$$

então, porque $\int_0^\infty \frac{dt}{e^t}$ é convergente (corresponde ao caso $\alpha = 1$ no exemplo acima), pelo critério do limite, $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ tambem é convergente.

Teorema 1.4 *Seja f definida em $[a,\infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x>a$.*

$$Se \int_a^\infty |f| \text{ converge então } \int_a^\infty f \text{ tambem converge}$$

Dem. Sejam f^+ e f^- as funções definidas por

$$f^+=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}(\geq 0),\qquad \text{Parte Positiva de } f$$

$$f^-=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}(\geq 0),\qquad \text{Parte Negativa de } f$$

Temos então

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$$

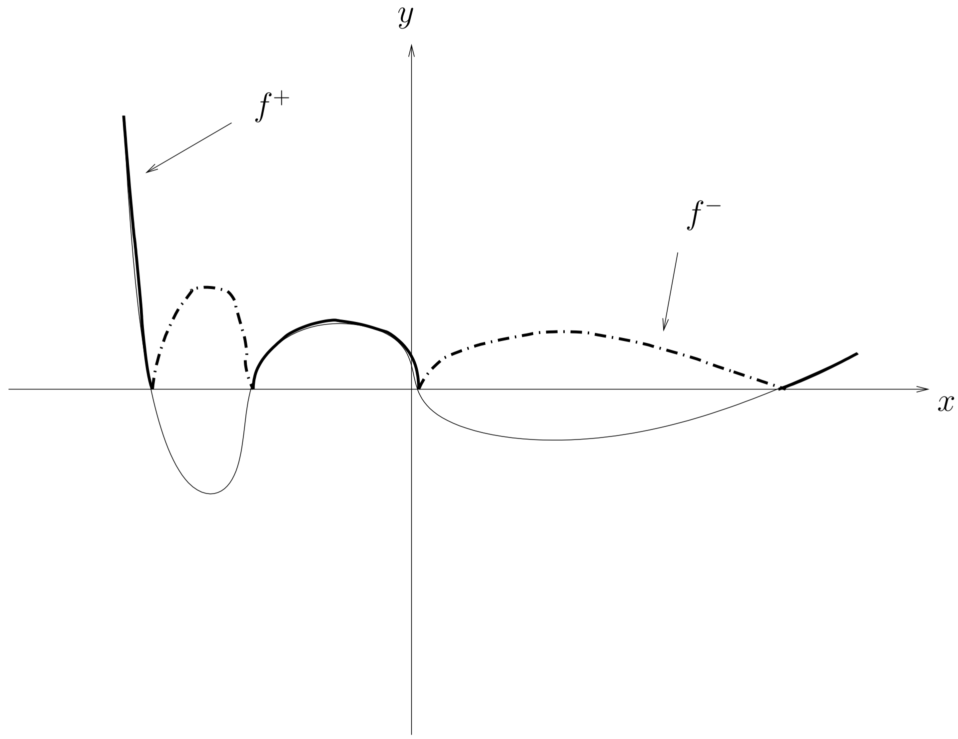

Figure 3: Parte Positiva ($f+$) e Parte Negativa ($f-$) de f

e como tanto f^+ como f^- são positivas,

$$|f(x)| \geq f^+ \qquad \text{e} \qquad |f(x)| \geq f^-$$

então a convergência de $\int_a^\infty |f|$ e o critério de majoração implicam a convergência de $\int_a^\infty f^+$ e de $\int_a^\infty f^-$. Finalmente, como $f = f^+ - f^-$, então $\int_a^\infty f$ é convergente através da Proposição 1.2. ■

Observação 1.2

De um modo geral, não é verdade que a convergência de $\int_a^\infty f$ implique a convergência de $\int_a^\infty |f|$.

Definição 1.2

Se $\int_a^\infty |f|$ converge diz-se que $\int_a^\infty f$ é **absolutamente convergente**.

Se $\int_a^\infty f$ converge mas $\int_a^\infty |f|$ **não** converge, diz-se que $\int_a^\infty f$ é **simplesmente convergente**.

Seguidamente provamos um resultado que nos permitirá apresentar (pelo menos) um integral simplesmente convergente.

Teorema 1.5 *Sejam u e v contínuas com derivada contínua em $[a, \infty[$. Se u é decrescente com* $\lim_{x\mapsto\infty} u(x) = 0$ *e v é limitada em $[a, \infty[$, então*

$$\int_a^\infty uv' \ \textit{converge}$$

Dem. Tem-se, pelo Teorema da integração por partes,

$$\lim_{x\mapsto\infty} \int_a^x uv' = \lim_{x\mapsto\infty} \Big(u(x)v(x) - u(a)v(a)\Big) - \lim_{x\mapsto\infty} \int_a^x u'v = -u(a)v(a) - \lim_{x\mapsto\infty} \int_a^x u'v$$

já que $\lim_{x\mapsto\infty} u(x) = 0$. Resta-nos então mostrar que $\int_a^\infty u'v$ converge, para se obter o resultado. Como

$$|u'(x)v(x)| = |u'(x)||v(x)| \leq M|u'(x)| = -Mu'(x)$$

(porque v é majorada e porque u é decrescente) e porque

$$\int_a^\infty \Big(-Mu'(t)\Big)dt = -M\int_a^\infty u'(t)dt = -M\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x u'(t)dt = -M\lim_{x\mapsto\infty}\Big[u(t)\Big]_a^x =$$
$$= -M\lim_{x\mapsto\infty}\Big[u(t)\Big]_a^x = -M\lim_{x\mapsto\infty}\Big(u(x)-u(a)\Big) = -M\Big(0-u(a)\Big) = Mu(a)$$

provando-se assim que

$$\int_a^\infty uv'$$

converge.

■

Exemplo 1.7

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx \text{ converge}$$

Basta notar que

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\cdot\Big(-\cos(x)\Big)'$$

donde esta integranda está nas condições do Teorema (com $u(x)=\frac{1}{x}$ e $v(x)=-\cos(x)$) donde segue que o integral impróprio em consideração converge.

Vamos agora ver que essa convergência é simples, ou seja que, apesar de, como vimos, $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$ convergir, $\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx$ não converge. Consideremos então

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}dx$$

Para x em $[k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{5\pi}{6}]$, $|\sin(x)|\geq\frac{1}{2}$ (ver figura 4), donde

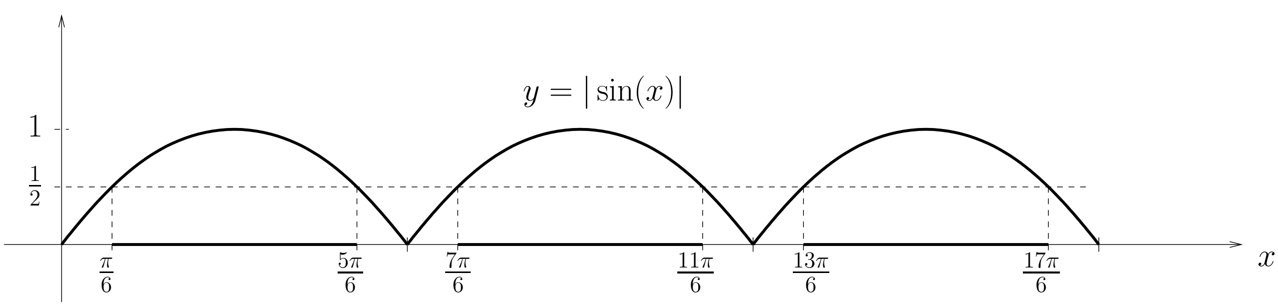

Figure 4: ... onde a função $y=|\sin(x)|$ é maior que $\frac{1}{2}$ ...

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \int_{k\pi+\frac{\pi}{6}}^{k\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \frac{1}{2}\int_{k\pi+\frac{\pi}{6}}^{k\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{x}dx \geq \frac{1}{2}\frac{1}{k\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{2\pi}{3} \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\frac{1}{k\pi+\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{3}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x}dx$$

isto é,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \frac{1}{3}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x}dx$$

donde,

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}dx \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3} \int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}\log(n+1) \underset{n\mapsto\infty}{\longmapsto} \infty$$

e portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

converge simplesmente.

1.2 Integrais Impróprios: A função integranda não é limitada

Definição 1.3

Seja f não limitada em $]a,b]$ mas integrável em qualquer subintervalo fechado de $]a,b]$. Suponha-se ainda que existe e é finito

$$\lim_{x\mapsto a^+} \int_x^b f$$

Definimos

$$\int_a^b f = \lim_{x\mapsto a^+} \int_x^b f$$

dizendo que o integral impróprio converge. Se o limite acima não existe dizemos que o integral impróprio diverge.

Analogamente, se f não é limitada em $[a,b[$ mas integrável em qualquer subintervalo fechado de $[a,b[$ e se existe e é finito

$$\lim_{x\mapsto b^-} \int_a^x f$$

definimos

$$\int_a^b f = \lim_{x\mapsto b^-} \int_a^x f$$

dizendo que o integral impróprio converge. Se o limite acima não existe dizemos que o integral impróprio diverge.

Exemplo 1.8

Qual a natureza de

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx \qquad ?$$

Tem-se,

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{x\mapsto 0^+} \Big[\log(t)\Big]_x^1 = \infty$$

Então, $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ diverge.

Qual a natureza de

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad ?$$

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\mapsto 0^+} \Big[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} t^{-\frac{1}{2}+1})\Big]_x^1 = 2$$

e então $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge.

Suponhamos que f está definida em $]a,b[$ e é integravel em qualquer subintervalo fechado de $[a,b]$. Se, para certo c em $]a,b[$,

$$\int_a^c f \text{ e } \int_c^b f$$

forem ambos convergentes, então dizemos que $\int_a^b f$ converge tendo-se

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Definição 1.4

Seja f definida em $]a, \infty[$ integrável em qualquer subintervalo fechado de $]a, \infty[$. Suponha-se ainda que

$$\int_{a^+}^c f \quad \text{e} \quad \int_c^\infty f$$

convergem ambos. Então dizemos que $\int_a^\infty f$ converge, tendo-se

$$\int_a^\infty f = \int_{a^+}^c f + \int_c^\infty f$$

Exemplo 1.9

Qual a natureza de

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} dx \quad ?$$

Como pelo menos um dos integrais

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

diverge (de facto, divergem ambos, até) então o integral em questão é divergente.

No caso de f ser não limitada "junto" a a podemos converter o integral impróprio de integranda não limitada em integral impróprio sobre intervalo não limitado:

$$\int_a^b f(t) dt = (\text{ fazendo } u = \frac{1}{t-a}, \ldots) \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{f(a + \frac{1}{u})}{u^2} du$$

e se f fosse não limitada "junto" a b:

$$\int_a^b f(t) dt = (\text{ fazendo } u = \frac{1}{b-t}, \ldots) \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{f(b - \frac{1}{u})}{u^2} du$$

Isso permite-nos desde logo dar os seguintes exemplos:

Exemplo 1.10

Qual a natureza de

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \quad ?$$

Tem-se,

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{u^\alpha}{u^2} du = \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{du}{u^{2-\alpha}}$$

Portanto

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge para} & \alpha < 1 \\ \text{diverge para} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Qual a natureza de

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \quad ?$$

Tem-se,

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{u^\alpha}{u^2} du = \int_{\frac{1}{b-a}}^\infty \frac{du}{u^{2-\alpha}}$$

e portanto

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge para} & \alpha < 1 \\ \text{diverge para} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

As conversões acima de integrais imprópríos de integrandas não limitadas para integrais imprópios de integrandas limitadas sobre intervalos não limitados permitem-nos tambem obter nesta secção os analogos dos resultados da secção anterior. Registamos aqui unicamente os analogos do critério de majoração e do limite:

Teorema 1.6 (Critério de majoração) *Sejam f e g positivas e definidas em $]a, b]$ e integráveis em qualquer intervalo $[x, b]$ com $a < x \leq b$. Seja ainda $f(x) \leq g(x)$ em $]a, b]$.*

$$\text{Se } \int_a^b g \quad \text{converge, então} \quad \int_a^b f \quad \text{tambem converge.}$$

$$\text{Se } \int_a^b f \quad \text{diverge, então} \quad \int_a^b g \quad \text{tambem diverge.}$$

Corolário 1.3 (Critério do limite) *Sejam f e g positivas e definidas em $]a, b]$ e integráveis em qualquer intervalo $[x, b]$ com $a < x \leq b$. Suponha-se ainda que $g(x) > 0$ em $]a, b]$ e que existe, em $\overline{\mathbb{R}}$,*

$$l = \lim_{x \mapsto a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Se} \quad l > 0 \quad \text{então} \quad \int_a^b f \quad \text{e} \quad \int_a^b g \text{ têm a mesma natureza} \tag{4}$$

$$\text{Se} \quad l = 0 \quad \text{então} \quad \left[\int_a^b g \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \text{ converge}\right] \tag{5}$$

$$\text{Se} \quad l = \infty \quad \text{então} \quad \left[\int_a^b f \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b g \text{ converge}\right] \tag{6}$$

(Notar tambem a importância dos contrarecíprocos de (5) e (6))