Cálculo Diferencial e Integral II - Tagus Park **1o. Semestre 2009/2010**
1o. Teste **17/Outubro/2009**
Justifique as suas respostas

1. **(3 val.)** Esboce o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2-4\le y\le 4-x^2\,\}$$

Resposta:

$$0=x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-2$$
$$0=4-x^2=2^2-x^2=(x-2)(x+2)\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-2$$

$$0=\left(x^2-4\right)'=2x\Leftrightarrow x=0 \qquad \left(x^2-4\right)''=2>0$$

Mínimo em $x=0$ com o valor -4.

$$0=\left(4-x^2\right)'=-2x\Leftrightarrow x=0 \qquad \left(4-x^2\right)''=-2<0$$

Máximo em $x=0$ com o valor 4.

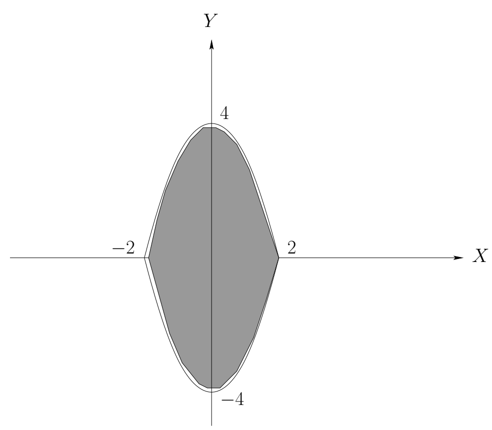

Figure 1: Esboço

2. **(3 val.)** Em $\mathbb{R}^3$, a recta L_1 contem o ponto $(4,3,2)$ e a sua direcção é dada pelo vector $(3,5,1)$; a recta L_2 contem o ponto $(4,3,2)$ e a sua direcção é dada pelo vector $(2,3,4)$. Escreva uma expressão do plano que contem estas rectas.

Resposta: Um vector perpendicular às duas rectas é dado por:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}(5\cdot4-1\cdot3)+\vec{j}(1\cdot2-3\cdot4)+\vec{k}(3\cdot3-2\cdot5)=17\vec{i}-10\vec{j}-\vec{k}$$

Então, a equação do plano que passa por $(4,3,2)$ e é perpendicualr às duas rectas dadas é:

$0=(x-4,y-3,z-2)\cdot(17,-10,-1)$ que simplificado resulta $17x-10y-z=36$

3. **(3 val.)**Reescreva a equação $z = x^2 - y^2$ usando coordenadas cilíndricas e usando coordenadas esféricas . Simplifique as expressões obtidas. Em coordenadas cilíndricas:

$$z = \Big((r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = \Big) r^2\cos 2\theta$$

Em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\rho\cos\varphi &= (\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 - (\rho\sin\theta\sin\varphi)^{=}\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi - \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = \\ &= \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin^2\varphi = \rho^2\cos(2\theta)\sin^2\varphi\end{aligned}$$

donde

$$\cos\varphi = \rho\cos(2\theta)\sin^2\varphi$$

4. **(3 val.)**Caso exista, calcule o limite,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\sin(y^2)}{x^2+y^2}$$

Resposta: Entre outras possibilidades:

$$\left|\frac{x^3\sin(y^2)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^3|\sin(y^2)|}{||(x,y)||^2} \leq \frac{|x|^3}{||(x,y)||^2} \leq \frac{||(x,y)||^3}{||(x,y)||^2} = ||(x,y)|| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

porque $||\ldots||$ é função contínua com $||(0,0)|| = 0$. Então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\sin(y^2)}{x^2+y^2} = 0$$

5. **(2 val.)**Seja f uma função de classe C^1 e seja $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Mostre que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$

Resposta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\end{aligned}$$

Então:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta)\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta+$$

$$+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2r^2\sin^2\theta-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2r^2\cos^2\theta\right)^2\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

6. **(3 val.)**Classifique os pontos de estacionariedade de $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$ Resposta:

$$\begin{cases}0 &= \frac{\partial f}{\partial x}=4y-4x^3\\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y}=4x-4y^3\end{cases}\iff\begin{cases}y &= x^3\\ x &= y^3\end{cases}$$

e portanto

$$\begin{aligned}0=&x^9-x=x(x^8-1)=x(x^4-1)(x^4+1)=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=\\ &=x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\end{aligned}$$

os pontos de estacionariedade são:

$$(0,0)\qquad(1,1)\qquad(-1,-1)$$

Derivadas parciais de 2a. ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-12x^2\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-12y^2$$

$$H(x,y)=\det\begin{pmatrix}-12x^2 & 4\\ 4 & -12y^2\end{pmatrix}$$

Então, $H(0,0)=-16<0$: ponto de sela em $(0,0)$.

$H(1,1)=144-16>0$: extremo em $(1,1)$. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=-12<0$, ocorre um máximo em $(1,1)$.

Finalmente, $H(-1,-1)=144-16>0$: extremo em $(-1,-1)$. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)=-12<0$, ocorre um máximo em $(-1,-1)$.

7. **(3 val.)**Determine o máximo e o mínimo da função $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$, sobre o conjunto $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}x^2+y^2=1\,\}$. Resposta: Faça-se

$$g(x,y)=\frac{1}{2}x^2+y^2-1$$

Então:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \lambda x \\ y & = \lambda 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & = (1-\lambda)x \\ 0 & = (1-2\lambda)y \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \\ y & = 0 \text{ ou } \lambda = 1/2 \end{cases}$$

Como $x = 0, y = 0$ não é compatível com $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$, então se $x = 0$, $y = \pm 1$; se $y = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$.

Máximo: $f(\sqrt{2}, 0) = 1$; mínimo: $f(0, 1) = 1/2$