

1. Determine extremos locais e pontos de sela das funções dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{array}{ll}
 a) & 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy \\
 b) & 9x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 4xy \\
 c) & 8x^3 + y^3 + 6xy \\
 d) & x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8 \\
 e) & 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y \\
 f) & 4xy - x^4 - y^4 \\
 g) & x^4 + y^4 + 4xy \\
 h) & 3x^4 - 4x^2y + y \\
 i) & x^2 + y^2 + e^{xy}
 \end{array}$$

2. Determine o desenvolvimento de Taylor de 2a. ordem em torno de $(0, 0)$ da função $f(x, y) = x \sin(y) + y \sin(x)$. Aproveite o resultado para calcular o valor de a tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - axy}{x^2 + y^2} = 0$$

3. Seja $f(s, t)$ o quadrado da distância entre um ponto da recta $x = t, y = t + 1, z = 2t$ e um ponto da recta $x = 2s, y = s - 1, z = s + 1$. Mostre que o único ponto crítico de f é um mínimo. Interprete o resultado geometricamente.

4. Seja $f(x, y)$ o quadrado da distância do ponto $(0, 0, 2)$ a um ponto da superfície $z = xy$. Calcule e classifique os pontos de estacionariedade de f .

5. Seja $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Verificar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

6. Considere a equação com derivadas parciais (equação das ondas)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a > 0)$$

Uma função $u = u(x, t)$ com derivadas parciais de 2a. ordem contínuas diz-se solução desta equação se u satisfaz a equação em todos os pontos do seu domínio. Mostrar que qualquer função f com 2a. derivada contínua e tal que

$$u(x, t) = f(x - at)$$

é solução da equação das ondas. O mesmo para a função

$$w(x, t) = g(x + at)$$

Finalmente, mostre que qualquer função do tipo

$$u(x, t) = c_1 f(x - at) + c_2 g(x + at)$$

com c_1 e c_2 constantes e f e g com 2as. derivadas contínuas satisfaz a equação das ondas.

7. Sejam a , b e c números reais não todos nulos. Em que ponto da bola unitária em \mathbb{R}^3 ,

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

atinge a função

$$f(x, y, z) = ax + by + cz$$

o seu valor máximo?