

Justifique as suas respostas e apresente os seus cálculos.

I

1. Escreva as somas de Darboux inferior e superior da função:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x \text{ irracional} \\ 0, & \text{se } x \text{ racional} \end{cases}$$

relativas a uma decomposição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ (com $a < b$).

2. Calcule os integrais inferior e superior de f relativos ao intervalo $[a, b]$.
 f é integrável em $[a, b]$?

II. Calcule a forma geral das primitivas de

1. $\frac{x^2 - 5}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$ 2. $\sin(\log(x))$ 3. $\frac{\sin(2x)}{\sqrt[5]{\sin^2(x) + 1}}$

III. Considere a figura plana limitada pelas linhas de equação:

$$y = \tan(x); \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Calcule o volume do sólido gerado por rotação dessa figura em torno do eixo dos XX .

IV. Determine a função f , contínua e positiva em $[0, +\infty[$, que verifica:

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)f(t)} dt, \quad \text{para todo o } x \text{ em } \mathbb{R}$$

V. Usando uma mudança de variável conveniente, mostre que

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx \quad a \text{ e } b \text{ constantes positivas}$$