

Justifique as suas respostas e apresente os seus cálculos.

I.

1. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x \text{ é racional} \\ -e^x, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Escreva as somas de Darboux superior e inferior da função  $f$  relativas a um intervalo  $[a, b]$ , com  $a < b$ , e a uma sua decomposição  $d$ , com pontos  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

2. Calcule os integrais inferior e superior de  $f$  relativos ao intervalo  $[a, b]$ .  $f$  é integrável em  $[a, b]$ ?

II. Calcule a forma geral das primitivas de

(a)  $\left(\frac{x}{e^x}\right)^2$

(b)  $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

(c)  $\frac{1}{x^3+1}$

III.

Calcule a área da região plana definida por:

$$x^2 - 1 \leq y \leq (x + 1)^2 \quad \text{e} \quad -1 \leq x + y \leq 1$$

IV. Calcule o volume de um cone de altura  $h$  e raio de base  $r$ . (Tenha presente os métodos de cálculo de volumes de sólidos gerados por rotação de áreas abaixo de gráficos de funções)

V. Determine a constante real  $c$  e a função  $g$ , contínua e positiva, que verificam:

$$\int_0^x t^2 \ln(g(t)) dt = x^3 - x^4 + c$$