

Justifique as suas respostas e apresente os seus cálculos.

I. Determine a natureza dos seguintes integrais fazendo a distinção entre convergência absoluta e simples.

$$1. \int_0^{\infty} \frac{x^k}{x^3 + 1} dx \quad (\dots \text{ em função do parâmetro } k) \quad 2. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$$

II.

1. Usando um polinómio de MacLaurin de grau 2, calcule um valor aproximado de

$$\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

apresentando uma estimativa do erro cometido.

2. Escreva o polinómio

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$$

como soma de potências de $(x - 2)$. (Sugestão: Use um desenvolvimento de Taylor de grau apropriado em torno de um ponto apropriado)

3. Esboce o gráfico da função

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x)$$

explicitando (caso existam) máximos e mínimos locais, intervalos de monotonia, pontos de inflexão e sentido das concavidades .

III.

1. Considere a função

$$h(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

Justificando a sua resposta, diga qual é o domínio desta função e em que pontos do domínio ela é contínua.

2. Caso exista, calcule

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} h(x, y, z)$$

3. Dados dois números positivos distintos, a e b , considere a elipse de equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Escreva a distância entre dois pontos distintos desta elipse, (x, y) e (x', y') , em que $y = y'$, em função da coordenada x (unicamente). Escreva, em termos dos parâmetros a e b , as coordenadas dos vértices de um triângulo **equilátero** com os vértices nesta elipse e em que dois deles têm a mesma segunda coordenada.