

Justifique as suas respostas e apresente os seus cálculos.

I. Sendo  $a$  e  $c$  duas constantes não nulas, exprima  $c$  em termos de  $a$  para que a função

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{at}}$$

verifique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

II. Considere a função

$$h(x, y) = \frac{e^{\sin(x)+\cos(y)}}{x^2 + y^2}$$

(a) Determine o domínio de  $h$  e indique, justificando, quais os pontos desse domínio onde  $h$  é diferenciável.

(b) Qual é a taxa de variação máxima da função  $h$  no ponto  $(0, \frac{\pi}{2})$ ? Indique também a direcção e sentido para os quais se observa essa taxa de variação máxima.

III. Mostre que as superfícies dadas pelas expressões

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad 10z = 25 + x^2 + y^2$$

têm o mesmo plano tangente no ponto  $(x_o, y_o, z_o) = (3, 4, 5)$ .

IV. Escreva o desenvolvimento de Taylor de 2a. ordem em torno de  $(0, 0)$  da função:

$$h(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2 + 1}\right)$$

V. Determine e classifique os pontos de estacionariedade das funções:

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy \quad (b) \quad g(x, y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$$