Análise Matemática IV

1º semestre, 2004/2005

Exercício-teste 1

1. a) Designe por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o producto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Define-se em $\mathbb{C}$ um producto interno Hermitiano, que se representa por $(\cdot, \cdot)$ e que é dado pela seguinte expressão:

$$(z, w) = z\bar{w}.$$

   (i) Mostre que o producto interno em $\mathbb{C}$ não é simétrico, mas satisfaz à relação $(z, w) = \overline{(w, z)}, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

   (ii) Usando a identificação usual entre o número $x + iy$ de $\mathbb{C}$ e o vector $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ de $\mathbb{R}^2$, mostre que $\langle z, w \rangle = \mathrm{Re}(z, w)$.

   b) Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e seja f holomorfa em Ω. Seja $\Omega^* \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \Omega\}$. Descreva Ω^* geometricamente. Sendo $g : \Omega^* \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{(f(\bar{z}))^2}$, mostre que g é holomorfa.

2. a) O plano complexo estendido é o conjunto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ onde $\infty \notin \mathbb{C}$. Uma forma de visualizar $\mathbb{C}^*$ é através da *projecção estereográfica* definida do seguinte modo: Seja $\mathbb{S}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^3$. Seja $(0, 0, 1)$ o pólo norte de $\mathbb{S}$ e seja (X, Y, Z) um ponto arbitrário de $\mathbb{S}$ que não o pólo norte. Define-se a projeccção estereográfica de (X, Y, Z) como sendo o ponto $z = x + iy \sim (x, y, 0)$ onde a recta que passa por $(0, 0, 1)$ e (X, Y, Z) intersecta o plano $Z = 0$. O ponto ∞ de $\mathbb{C}^*$ é, por definição, a projecção estereográfica do pólo norte de $\mathbb{S}$.

   (i) Obtenha as coordenadas x e y de um ponto $z \in \mathbb{C}$ em função das coordenadas do correspondente ponto $(X, Y, Z) \in \mathbb{S} \setminus \{(0, 0, 1)\}$.

   (ii) Obtenha uma expressão para as coordenadas (X, Y, Z) de um ponto de $\mathbb{S}$ em função das coordenadas do ponto $z \in \mathbb{C}^*$, imagem do primeiro pela projecção estereográfica.

   No presente contexto $\mathbb{S}$ é designado por *esfera de Riemann.*

   b) Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e seja f holomorfa em Ω. Seja $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(z)}$. Esclareça em que condições é que g é holomorfa.