Análise Matemática IV

2º semestre, 2004/2005

Exercício-teste 2

1. Considere os seguintes integrais *reais:*

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx, \tag{1}$$

onde $\int_0^{+\infty}$ deve ser interpretado como sendo igual ao $\lim_{r\to+\infty}\int_0^r$. Mostre que ambos os integrais são iguais a $\sqrt{2\pi}/4$.
[Sugestão: Aplique o Teorema de Cauchy à função inteira $f(z) = e^{-z^2}$ na fronteira do sector circular $S_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r \wedge arg(z) \in [0, \pi/4]\}$, faça $r \to +\infty$, e utilize o resultado $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$.]
[Observação: Os integrais em (1) designam-se por integrais de Fresnel e são úteis em Óptica (Teoria da Difração de Fresnel) e em diversas áreas de Engenharia (nomeadamente em Processamento de Sinais, mas também em outras áreas: para uma aplicação interessante ao projecto de linhas ferroviárias veja `http://www.du.edu/~jcalvert/railway/transpir.htm`*)]*

2. Seja $\xi \in \mathbb{R}$. Conclua que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx = e^{-\pi\xi^2}. \tag{2}$$

[Sugestão: Aplique o Teorema de Cauchy-Goursat à função inteira $f(z) = e^{-\pi z^2}$ na fronteira do rectângulo $R_r = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in [-r, r] \wedge y \in [0, \xi]\}$, faça $r \to +\infty$, e utilize o resultado $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$.]
[Observação: O integral que surge no membro esquerdo de (2) define a transformada de Fourier da função $e^{-\pi x^2}$. Esta função é particularmente importante em Processos Estocásticos, estando relacionada com a distribuição Normal, ou Gaussiana e intervindo em diversas aplicações fundamentais, tais como no estudo do movimento Browniano. A transformada de Fourier é um assunto de importância capital em Análise Matemática e nas suas aplicações à Física (Mecânica Quântica, Mecânica de Fluidos, Física Estatística) e às Engenharias (Propagação e Tratamento de Sinais). A igualdade (2) expressa o facto de $e^{-\pi(\cdot)^2}$ ser a sua própria transformada de Fourier.]

Resolução:

1. Seguindo a sugestão considere-se $\gamma_r = \partial S_r$ percorrida uma vez em sentido directo. Seja $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2} + \gamma_{r,3}$, com

$$\begin{array}{llll} \gamma_{r,1}(x) = x, & x \in [0, r]; & \gamma_{r,2}(\theta) = re^{i\theta}, & \theta \in [0, \pi/4]; \\ \gamma_{r,3}(t) = (r - t)e^{i\pi/4}, & t \in [0, r]. & & \end{array}$$

Tem-se então, pelo Teorema de Cauchy,

$$0 = \int_{\gamma_r} e^{-z^2} dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_{r,k}} e^{-z^2} dz \tag{3}$$

Atendendo à sugestão do enunciado tem-se

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} dt,$$

onde a última igualdade decorre da mudança de variáveis $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} t$. Consequentemente,

$$\int_{\gamma_{r,1}} e^{-z^2} dz = \int_0^r e^{-x^2} 1 dx \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4}$$

Para o integral sobre $\gamma_{r,3}$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{r,3}} e^{-z^2} dz &= \int_0^r e^{-(r-t)^2 e^{i\pi/2}} (-1) e^{i\pi/4} dt \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^r e^{-(r-t)^2 i} dt \\ &\quad \text{(mudando de variável } t \mapsto x = r - t) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_r^0 e^{-x^2 i} (-1) dx \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^r e^{-x^2 i} dx \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\int_0^r (\cos(-x^2) + i \operatorname{sen}(-x^2)) dx\right) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\int_0^r (\cos(x^2) - i \operatorname{sen}(x^2)) dx\right) \end{aligned}$$

e quando $r \to +\infty$ o membro direito converge para

$$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\int_0^{+\infty} (\cos(x^2) - i \operatorname{sen}(x^2)) dx\right). \tag{5}$$

Finalmente, para o integral sobre o arco de circunferência $\gamma_{r,2}$ tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{r,2}} e^{-z^2} dz &= \int_0^{\pi/4} e^{-r^2 e^{2i\theta}} r i e^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{r} \int_0^{\pi/4} e^{-r^2 e^{2i\theta}} r^2 i e^{2i\theta} e^{-i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{r} \int_0^{\pi/4} \frac{d}{d\theta} \left(e^{-r^2 e^{2i\theta}} \right) e^{-i\theta} d\theta \\
&\quad \text{(integrando por partes)} \\
&= \frac{1}{r} \left[e^{-r^2 e^{2i\theta}} e^{-i\theta} \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} e^{-r^2 e^{2i\theta}} (-i) e^{-i\theta} d\theta \right], \\
&= \frac{1}{r} \left[e^{-r^2 i} e^{-i\pi/4} - e^{-r^2} + i \int_0^{\pi/4} e^{-r^2 e^{2i\theta}} e^{-i\theta} d\theta \right],
\end{aligned}$$

o que resulta na estimativa

$$\left| \int_{\gamma_{r,2}} e^{-z^2} dz \right| \leq \frac{1}{r} \left(1 + 1 + \frac{\pi}{4} \right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0. \tag{6}$$

Aplicando limites quando r tende para $+\infty$ a ambos os membros de (3) e usando (4)-(6) conclui-se que

$$0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\int_0^{+\infty} (\cos(x^2) - i \operatorname{sen}(x^2)) dx \right),$$

ou seja,

$$\int_0^{+\infty} (\cos(x^2) - i \operatorname{sen}(x^2)) dx = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - i \frac{\sqrt{2\pi}}{4},$$

como se pretendia.

2. Seguindo a sugestão do enunciado, seja $\gamma_r = \partial R_r$ percorrida uma vez em sentido directo. Escreva-se $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2} + \gamma_{r,3} + \gamma_{r,4}$, com

$$\begin{array}{llll}
\gamma_{r,1}(t) = t, & t \in [-r, r]; & \gamma_{r,2}(t) = r + ti, & t \in [0, \xi] \\
\gamma_{r,3}(t) = -t + \xi i, & t \in [-r, r]; & \gamma_{r,4}(t) = -r + (\xi - t)i, & t \in [0, \xi].
\end{array}$$

Tem-se então, pelo Teorema de Cauchy-Goursat,

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\gamma_r} e^{-\pi z^2} dz \quad &= \quad \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_{r,k}} e^{-\pi z^2} dz \\
&= \quad \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} dt + \int_0^{\xi} e^{-\pi (r+ti)^2} i dt + \\
&\quad + \int_{-r}^{r} e^{-\pi(-t+\xi i)^2} (-1) dt + \int_0^{\xi} e^{-\pi(-r+(\xi-t)i)^2} (-i) dt \\
&= \quad \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} dt - \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi t \xi i} e^{\pi \xi^2} dt + \\
&\quad + i e^{-\pi r^2} \left(\int_0^{\xi} e^{-2\pi t r i} e^{\pi t^2} dt - \int_0^{\xi} e^{2\pi(\xi - t) r i} e^{\pi(\xi-t)^2} dt \right) \\
&= \quad \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} dt - e^{\pi \xi^2} \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi t \xi i} dt + \\
&\quad + i e^{-\pi r^2} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-2\pi t r i} e^{\pi t^2} dt.
\end{aligned}
$$

Passando ao limite $r \to +\infty$ e observando que

$$
\begin{aligned}
\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} dt \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt \; = \; 1 \\
\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi t \xi i} dt \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi t \xi i} dt \\
\lim_{r \to +\infty} \left| i e^{-\pi r^2} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-2\pi t r i} e^{\pi t^2} dt \right| \quad &\leq \quad \lim_{r \to +\infty} e^{-\pi r^2} \int_{-\xi}^{\xi} \left| e^{-2\pi t r i} \right| e^{\pi t^2} dt \\
&= \quad \lim_{r \to +\infty} e^{-\pi r^2} \int_{-\xi}^{\xi} e^{\pi t^2} dt \\
&= \quad 0
\end{aligned}
$$

e portanto concluimos que

$$
0 = 1 - e^{\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi t \xi i} dt,
$$

que é o resultado pretendido.