# Análise Matemática IV

# 2º semestre, 2004/2005

## Exercício-teste 3

1. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 6x + 10} dx \ .$$

2. Seja $n \in \mathbb{Z}^+$ e considere a função $f(z) = \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}$.
*Utilizando a definição* de resíduo de uma função num ponto e a fórmula do binómio de Newton, conclua que

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \binom{2n}{n}(-1)^n$$

e aproveite este resultado para mostrar que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n} \theta d\theta = \frac{\pi(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

**Resolução:**

1. Considere-se a função complexa de variável complexa

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 6z + 10}$$

e para $R > |-3 \pm i| = \sqrt{10}$, a curva

$$C_R = I_R \cup \Gamma_R \equiv \{z = x \ : \ x \in [-R, R]\} \cup \{z = Re^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, \pi]\}$$

percorrida uma vez em sentido directo. $f$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-3+i, -3-i\}$, e atendendo a que $-3+i \in \operatorname{int} C_R$ e $-3-i \notin \operatorname{int} C_R$, tem-se, por aplicação do Teorema dos Resíduos

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \ \operatorname{Res}(f, -3+i) \mathrm{I}(C_R, -3+i)$$

Sendo a curva percorrida uma vez em sentido directo, o índice é igual a 1. Verifica-se também facilmente que $-3+i$ é um pólo simples de $f$ (porque é um zero simples do denominador e não é zero nem singularidade do numerador). Tem-se então

$$\operatorname{Res}(f, -3+i) = \lim_{z \to -3+i} (z - (-3+i)) f(z) = \lim_{z \to -3+i} \frac{e^{iz}}{z - (-3-i)} = \frac{e^{(-3+i)i}}{2i}$$

pelo que

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \frac{e^{-1-3i}}{2i} 1 = \pi e^{-1} (\cos 3 - i \operatorname{sen} 3)$$

Por outro lado

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = \int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz$$

ou seja
$$\pi e^{-1}(\cos 3 - i \operatorname{sen} 3) = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$
e fazendo $R \to \infty$, obtemos
$$\pi e^{-1}(\cos 3 - i \operatorname{sen} 3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+6x+10} dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$
Atendendo a que
$$\Big|\frac{1}{z^2+6z+10}\Big| \le \frac{1}{||z|^2-6|z|-10|} \to 0 \quad \text{quando} \quad |z| \to \infty$$
por aplicação do Lema de Jordan conclui-se que
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$$
e como tal
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+6x+10} dx = \pi e^{-1}(\cos 3 - i \operatorname{sen} 3) n$$
Finalmente, atendendo a que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ (visto $x \in \mathbb{R}$) e às propriedades do integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+6x+10} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+6x+10} dx = \pi e^{-1} \cos 3 - i\pi e^{-1} \operatorname{sen} 3$$
pelo que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+6x+10} dx = -\pi e^{-1} \operatorname{sen} 3$$

2. Recorrendo à expressão do binómio de Newton tem-se
$$f(z) = \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(z^2\right)^k (-1)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2k-2n-1}(-1)^{2n-k}.$$
Observe-se que se trata de uma soma finita e portanto é obvio que a região de convergência é $\mathbb{C} \setminus \{0\} = D(0;0,\infty)$. Pela definição de resíduo de $f$ em 0 (relembre-se: é o coeficiente da potência $z^{-1}$ da série de Laurent convergente em $D(0;0,\varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$) conclui-se imediatamente que o resíduo é obtido pelo termo $k = n$ da soma apresentada, ou seja
$$\operatorname{Res}(f,0) = \binom{2n}{n}(-1)^{2n-n} = \binom{2n}{n}(-1)^n = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$
como se pretendia.

Considerando agora o integral
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n} \theta d\theta,$$
comecemos por observar que estamos em presença de uma função integranda par, por ser a potência par de uma função ímpar, e portanto o integral é igual a
$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^{2n} \theta d\theta.$$

Utilizando a definição da função seno e a mudança de variável $\theta \mapsto z = e^{i\theta}$ pode-se escrever

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\left(\frac{z+z^{-1}}{2i}\right)^{2n}\frac{1}{iz}dz = -i\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}dz,$$

onde para obter a última igualdade multiplicámos e dividimos a função integranda por $z^{2n}$. Observe-se que o último integral é o integral da função $f$ sobre a curva $|z|=1$ percorrida uma vez em sentido directo. Pelo que se viu anteriormente, $f$ tem uma única singularidade, em $z=0$, e portanto, pelo Teorema dos Resíduos e pelo valor do resíduo determinado acima, conclui-se que o integral do enunciado vale

$$-i\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}2\pi i(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi(2n)!}{(2^n n!)^2},$$

como se pretendia.