Análise Matemática IV

1º semestre, 2004/2005

Exercício-teste 4

1.a) Seja $A(t) : \mathbb{R} \to M_{n\times n}$ contínua e considere o sistema de EDOs lineares

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} \tag{1}$$

Sendo $\Phi(t)$ uma matriz fundamental de (1), deduza que $\Phi(t)^{-1}$ é uma solução matricial da equação adjunta $(\boldsymbol{y}^T)' = -\,\boldsymbol{y}^T A(t)$, onde o sobrescrito T denota a operação de transposição.
(Sugestão: derive a identidade $\Phi(t)^{-1}\Phi(t) = I_n$)

b) Sejam $A(t)$, $B(t)$, $F(t) : \mathbb{R} \to M_{n\times n}$ funções contínuas e considere o problema de Cauchy para o sistema matricial

$$\begin{cases} X' = A(t)X - X\,B(t) + F(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{2}$$

onde a incognita é uma função matricial $X = X(t) : \mathbb{R} \to M_{n\times n}$. Utilizando um método de factores integrantes análogo ao utilizado para sistemas vectoriais lineares não-homogéneos, mostre que a solução de (2) é dada por

$$X(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}X_0\Psi(0)\Psi(t)^{-1} + \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}F(s)\Psi(s)\Psi(t)^{-1}ds$$

onde Φ e Ψ são matrizes fundamentais de $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ e de $\boldsymbol{x}' = B(t)\boldsymbol{x}$, respectivamente.

2.a) No decaimento de isótopos radioactivos é largamente utilizado o conceito de *tempo de meia-vida*, $T_{1/2}$, que mede o tempo necessário para que uma determinada quantidade inicial do isótopo em causa fique reduzida a metade. Sabe-se que o processo elementar de decaimento de um isótopo radioactivo X para produzir um outro isótopo Y, [1] satisfaz

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

onde $x = x(t)$ é a concentração de X no instante t, e $k > 0$ é uma constante do decaimento. Determine o valor de k para o decaimento-α do Radio-226, sabendo que o seu tempo de meia-vida é de 1600 anos.

b) Se um processo de decaimento radioactivo não é elementar, mas composto de um número finito de processos elementares, a concentração de cada um dos isótopos intervenientes evolui com o tempo de acordo com um sistema de EDOs obtido por um simples balanço de massa: por exemplo, num hipotético processo $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$, onde o primeiro decaimento tem

[1] processo usualmente representado por $X \longrightarrow Y$

constante k_1 e o segundo k_2, ter-se-á $x' = -k_1 x$, $y' = k_1 x - k_2 y$ e $z' = k_2 y$, onde x, y e z são funções do tempo t que representam as concentrações de X, Y e Z respectivamente.

Escreva o sistema de EDOs que descreve a evolução de *todos* os onze isotopos originados pelo processo de decaimento radioactivo do Radio-226 apresentado no esquema seguinte e *indique como procederia* se pretendesse resolver analiticamente o sistema obtido. Determine a expressão para a evolução no tempo da concentração de Radon-222, sabendo que inicialmente apenas está presente Radio-226.

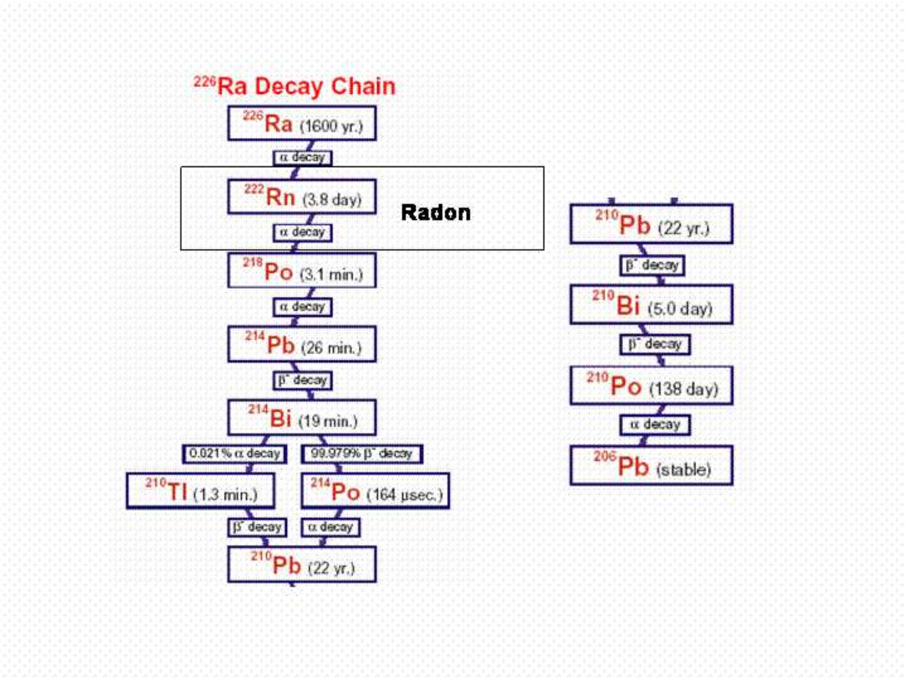

Figura 1: Decaimento radioactivo do Radio-226

Resolução:

1.a) Seja $\Phi(t)$ uma matriz fundamental de (1). Então, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t)$ é invertível. A inversa é uma matriz de componentes $\mathcal{C}^1$ visto que $\Phi(t)^{-1} = \frac{(\text{adj}\Phi(t))^T}{\det \Phi(t)}$ e o membro direito é obtido por um número finito de operações algébricas sobre as componentes de $\Phi(t)$, as quais são funções de classe $\mathcal{C}^1$ (porquê?) Como $\Phi(t)^{-1}\Phi(t) \equiv I$ e todas as matrizes envolvidas são de classe $\mathcal{C}^1$, pode-se derivar ambos os membros (em relação a t) para concluir que $(\Phi(t)^{-1})'\Phi(t) + \Phi(t)^{-1}(\Phi(t))' = O$, ou seja, usando o facto de $\Phi(t)$ ser uma matriz fundamental de (1) e portanto $(\Phi(t))' = A(t)\Phi(t)$, tem-se $\left((\Phi(t)^{-1})' + \Phi(t)^{-1}A(t)\right)\Phi(t) = O$ e como $\Phi(t)$ é não-singular, isto implica que

$$(\Phi(t)^{-1})' + \Phi(t)^{-1}A(t) = O,$$

como se pretendia concluir.

1.b) Escreva-se a equação diferencial em (2) na forma $X' - A(t)X + X\,B(t) = F(t)$. Multipliquemos esta equação diferencial à esquerda e à direita por funções matriciais $M = M(t)$ e $N = N(t)$, respectivamente, convenientemente escolhidas de modo a que o membro esquerdo possa ser escrito como a derivada do produto MXN. Como o derivada deste produto é $M'XN + MX'N + MXN'$ e o resultado da multiplicação da equação dada pelos factores integrantes, descrita acima, é $MX'N - MA(t)XN + MXB(t)N$, tem de se ter $M' = -MA(t)$ e $N' = B(t)N$. Atendendo à alínea anterior podemos concluir que os factores integrantes M e N terão de ser $M = \Phi(t)^{-1}$ e $N = \Psi(t)$, com Φ e Ψ definidas no enunciado. Nestas condições, efectuando as multiplicações descritas acima, integrando entre $t = 0$ e um t arbitrário e usando a condição inicial em (2) tem-se

$$\Phi(t)^{-1}X(t)\Psi(t) - \Phi(0)^{-1}X_0\Psi(0) = \int_0^t \Phi(s)^{-1}F(s)\Psi(s)ds$$

o que, após multiplicação à esquerda por $\Phi(t)$ e à direita por $\Psi(t)^{-1}$ resulta na expressão pretendida.

2.a) A solução geral da EDO para a concentração $x = x(t)$ do isótopo X é $x(t) = x(0)e^{-kt}$. Pela definição de $T_{1/2}$ tem-se $\frac{1}{2}x(0) = x(0)e^{-kT_{1/2}}$ e portanto $T_{1/2} = \frac{\log 2}{k}$

2.b) Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ as concentrações de, respectivamente, Radio-226, Radon-222, Polónio-218, Chumbo-214, Bismuto-214, Tálio-210, Polónio-214, Chumbo-210, Bismuto-210, Polónio-210 e Chumbo-210. Atendendo ao esquema de decaimento apresentado na Figura 1 têm-se as seguintes equações diferenciais para a evolução das concentrações em causa: $x_1' = -k_1x_1$, $x_2' = k_1x_1 - k_2x_2$, $x_3' = k_2x_2 - k_3x_3$, $x_4' = k_3x_3 - k_4x_4$, $x_5' = k_4x_4 - (2.1 \times 10^{-4}\tilde{k}_5 + 0.99979\hat{k}_5)x_5$, $x_6' = 2.1 \times 10^{-4}\tilde{k}_5x_5 - k_6x_6$, $x_7' = 0.99979\hat{k}_5x_5 - k_7x_7$, $x_8' = k_6x_6 + k_7x_7 - k_8x_8$,

$x_9' = k_8x_8 - k_9x_9$, $x_{10}' = k_9x_9 - k_{10}x_{10}$ e finalmente $x_{11}' = k_{10}x_{10}$. Designando por $\boldsymbol{x}$ o vector das concentrações $(x_1, \ldots, x_{11})^T$ o sistema de EDOs pretendido é $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, onde a matriz A do sistema é

$$\begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1\times 10^{-4}\tilde{k}_5 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99979\hat{k}_5 & 0 & -k_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 & k_7 & -k_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_8 & -k_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_9 & -k_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

onde $k_5 \stackrel{\text{def}}{=} 2.1\times 10^{-4}\tilde{k}_5 + 0.99979\hat{k}_5$ Atendendo a que a matriz é triangular inferior, a maneira mais simples de resolver analiticamente o sistema seria começar por resolver a equação para x_1 e substituir o resultado na equação para x_2, obtendo-se assim uma equação escalar linear não-homogénea, cuja solução poderia ser facilmente determinada pelo métodos dos factores integrantes, e prosseguindo este processo de substituição sucessivamente até à última equação, para a variável x_{11} (a qual se reduz a uma questão de primitivação desde que seja conhecido x_{10}.)

Para conhecer a evolução de x_2 podemos aplicar o procedimento descrito acima até à primeira substituição: $x_1' = -k_1x_1$ tem como solução $x_1(t) = x_1(0)e^{-k_1t}$. Substituindo na segunda equação obtemos a equação não-homogénea $x_2' = -k_2x_2 + k_1x_1(0)e^{-k_1t}$, ou seja $x_2' + k_2x_2 = k_1x_1(0)e^{-k_1t}$. Multiplicando por um factor integrante $\mu = \mu(t)$ tem-se $\mu x_2' + \mu k_2x_2 = k_1x_1(0)e^{-k_1t}\mu(t)$ e para que o membro esquerdo desta expressão a derivada de mux_2, ou seja $\mu x_2' + \mu' x_2$, há que escolher $\mu(t)$ como uma solução da EDO $\mu' = k_2\mu$, por exemplo $\mu(t) = e^{k_2t}$. Tem-se então, após multiplicação por este factor integrante, a EDO na forma seguinte

$$\left(e^{k_2t}x_2(t)\right)' = k_1x_1(0)e^{(k_2-k_1)t}.$$

Como os tempos de meia-vida para os decaimentos do Radio-226 e do Radon-222 são diferentes (ver Figura 1) então, pelo que foi visto na alínea anterior, as constantes k_1 e k_2 são também diferentes[2] e portanto a integração da equação anteriormente escrita entre $t = 0$ e um t arbitrário resulta em $e^{k_2t}x_2(t) = k_1x_1(0)\int_0^t e^{(k_2-k_1)s}ds = \frac{k_1x_1(0)}{k_2-k_1}\left(e^{(k_2-k_1)t} - 1\right)$, ou seja,

$$x_2(t) = \frac{k_1x_1(0)}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1t} - e^{-k_2t}\right)$$

[2]Da relação entre a constante do decaimento e o tempo de meia-vida, deduzida na alínea anterior e pelos dados sobre os tempos de meia-vida apresentados na Figura 1, conclui-se que $k_2 \gg k_1$