

Análise Matemática IV

1º semestre, 2004/2005

Exercício-teste 4

1.a) Seja $A(t) : \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}$ contínua e considere o sistema de EDOs lineares

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \quad (1)$$

Sendo $\Phi(t)$ uma matriz fundamental de (1), deduza que $\Phi(t)^{-1}$ é uma solução matricial da equação adjunta $(\mathbf{y}^T)' = -\mathbf{y}^T A(t)$, onde o sobrescrito T denota a operação de transposição.

(Sugestão: derive a identidade $\Phi(t)^{-1}\Phi(t) = I_n$)

b) Sejam $A(t), B(t), F(t) : \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}$ funções contínuas e considere o problema de Cauchy para o sistema matricial

$$\begin{cases} X' = A(t)X - X B(t) + F(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (2)$$

onde a incógnita é uma função matricial $X = X(t) : \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}$. Utilizando um método de factores integrantes análogo ao utilizado para sistemas vectoriais lineares não-homogéneos, mostre que a solução de (2) é dada por

$$X(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}X_0\Psi(0)\Psi(t)^{-1} + \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}F(s)\Psi(s)\Psi(t)^{-1}ds$$

onde Φ e Ψ são matrizes fundamentais de $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ e de $\mathbf{x}' = B(t)\mathbf{x}$, respectivamente.

2.a) No decaimento de isótopos radioactivos é largamente utilizado o conceito de *tempo de meia-vida*, $T_{1/2}$, que mede o tempo necessário para que uma determinada quantidade inicial do isótopo em causa fique reduzida a metade. Sabe-se que o processo elementar de decaimento de um isótopo radioactivo X para produzir um outro isótopo Y ,¹ satisfaz

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

onde $x = x(t)$ é a concentração de X no instante t , e $k > 0$ é uma constante do decaimento. Determine o valor de k para o decaimento- α do Radio-226, sabendo que o seu tempo de meia-vida é de 1600 anos.

b) Se um processo de decaimento radioactivo não é elementar, mas composto de um número finito de processos elementares, a concentração de cada um dos isótopos intervenientes evolui com o tempo de acordo com um sistema de EDOs obtido por um simples balanço de massa: por exemplo, num hipotético processo $X \rightarrow Y \rightarrow Z$, onde o primeiro decaimento tem

¹processo usualmente representado por $X \rightarrow Y$

constante k_1 e o segundo k_2 , ter-se-á $x' = -k_1x$, $y' = k_1x - k_2y$ e $z' = k_2y$, onde x , y e z são funções do tempo t que representam as concentrações de X , Y e Z respectivamente.

Escreva o sistema de EDOs que descreve a evolução de *todos* os onze isótopos originados pelo processo de decaimento radioactivo do Radio-226 apresentado no esquema seguinte e *indique como procederia* se pretendesse resolver analiticamente o sistema obtido. Determine a expressão para a evolução no tempo da concentração de Radon-222, sabendo que inicialmente apenas está presente Radio-226.

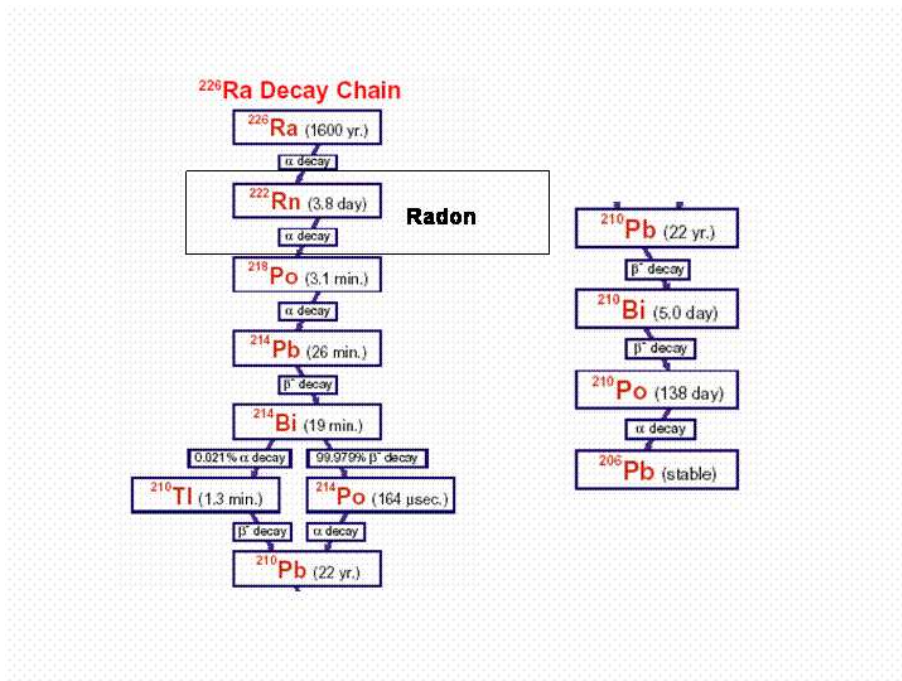


Figura 1: Decaimento radioactivo do Radio-226