Análise Matemática IV

1^{o} semestre, 2004/2005

Exercício-teste 5

1. Considere a equação diferencial ordinária linear

$$x'''' - 2x''' + x' = 0 \tag{1}$$

a) Mostre que nas variáveis $y_i \stackrel{\text{def}}{=} x^{(i-1)}$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a equação toma a forma de um sistema de primeira ordem

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}. \tag{2}$$

Identifique o vector $\mathbf{y}$ e a matriz companheira A.

b) Determine um subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^4$, L_2, que seja invariante para o sistema (2) e para o qual o(s) ponto(s) de equilíbrio da restrição de (2) seja(m) estável(eis). Esboce o retrato de fases da restrição do sistema a um subespaço tridimensional invariante, L_3, que contenha o subespaço L_2.

2. Considere a equação diferencial linear

$$x'''' - x''' + 8x' - 8x = 1 + t^2 \tag{3}$$

a) Determine a solução geral *real* da equação homogénea correspondente a (3).

b) Determine uma solução particular de (3) determine uma expressão para a solução geral *real* desta equação.

Resolução:

1.a) Sejam $y_1 \stackrel{\text{def}}{=} x$, $y_2 \stackrel{\text{def}}{=} x'$, $y_3 \stackrel{\text{def}}{=} x''$ e $y_4 \stackrel{\text{def}}{=} x'''$ tem-se $y_1' = x' = y_2$, $y_2' = x'' = y_3$, $y_3' = x''' = y_4$ e, usando a equação (1), $y_4' = x'''' = 2x''' - x' = 2y_4 - y_2$. Escrevendo o sistema em notação vectorial tem-se $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ onde $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ e a matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.b) Os valores próprios da matriz A são os zeros do polinómio característico da equação (1). Este polinómio obtem-se directamente da equação (como?) e é $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1)$. Portanto $\lambda_0 = 0$ é um zero. É fácil verificar que $\lambda_1 = 1$ é um zero do termo entre parentesis e portanto, dividindo este por $\lambda - 1$ obtém-se (faça!!) o polinómio $\lambda^2 - \lambda - 1$ cujos zeros são facilmente calculados pela fórmula resolvente das equações de segundo grau e são $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Consequentemente, todos os valores próprios da matriz A são reais, e distintos e portanto todas as multiplicidades geométricas dos valores próprios são iguais a 1. Assim, todos os espaços próprios são subespaços unidimensionais de $\mathbb{R}^4$ invariantes para o sistema (2). Atendendo a que a estabilidade das soluções de sistemas autónomos está relacionada com o sinal (da parte real) dos valores próprios da matriz do sistema, para que os pontos de equilibrio do sistema sejam estáveis há que restringi-lo ao subespaço gerado pelos espaços próprios correspondentes a valores próprios não-negativos (ou com parte real não-negativa). Neste caso o subespaço pretendido é $L_2 = E_{\lambda_0} \oplus E_{\lambda_3}$. O subespaço invariante L_3 ao qual se pretende agora restringir o sistema e esboçar o respectivo retrato de fases pode ser obtido pela soma directa de L_2 com qualquer dos espaços próprios de A ainda não usados na construção de L_2. Usaremos, por exemplo, E_{λ_1}. Determinando os vectores próprios correspondentes aos diversos valores próprios conclui-se que $L_2 = E_{\lambda_0} \oplus E_{\lambda_3} = \mathcal{L}\left((1,0,0,0)^T, \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)^T\right)$ e $E_{\lambda_1} = \{\alpha(1,1,1,1)^T\}$, onde $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ denota o espaço gerado pelos vectores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. Como E_{λ_0} é o espaço nulo da matriz A todos os pontos deste conjunto são pontos de equilíbrio do sistema. Consequentemente todas as órbitas da restrição do sistema a L_2 que não sejam pontos de equilíbrio (que não estejam em E_{λ_0}) são semi-rectas paralelas ao espaço (unidimensional) E_{λ_3}, como se esboça na Figura 1.

Atendendo a isto e ao modo como definimos L_3, a saber $L_3 = L_2 \oplus E_{\lambda_1}$, concluimos que o esboço do retrato de fases da restrição do sistema a este subespaço é o representado na Figura 2.

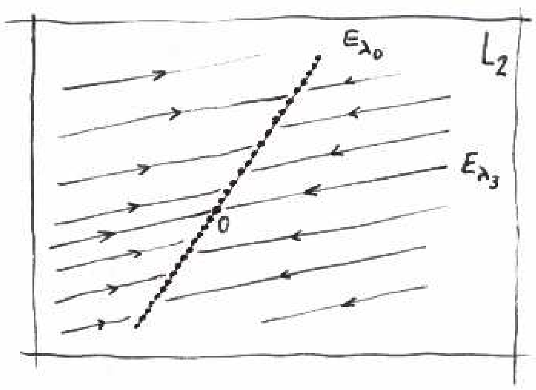

Figura 1: Esboço do retrato de fases da restrição do sistema a L_2.

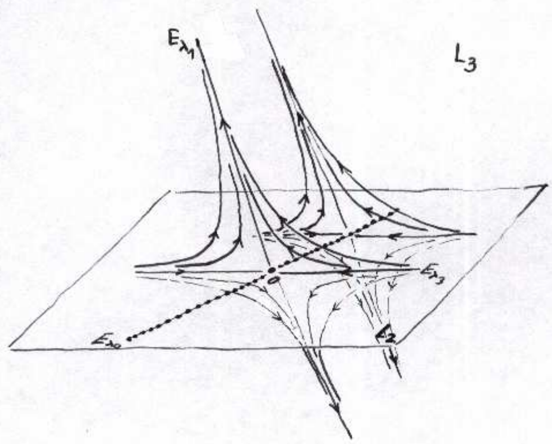

Figura 2: Esboço do retrato de fases da restrição do sistema a L_3.

2.a) Escrevendo a equação homogénea como $(D^4 - D^3 + 8D - 8)x = 0$ observa-se que o polinómio característico associado á equação é $p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^4 - \lambda^3 + 8\lambda - 8$. Observa-se sem dificuldade que $\lambda_1 = 1$ é um zero deste polinómio. Dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda - 1$ obtém-se (faça!) $\lambda^3 + 8$. Os zeros deste último polinómio são as raízes cúbicas de -8 (ou seja, de $2e^{i\pi}$) e a aplicação da fórmula de De Moivre permite concluir que estas são $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_4 = 2e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Sabendo que a parte real e a parte imaginária da solução complexa $x(t) = e^{\lambda_3 t} = e^{t/2}(\cos(\sqrt{3}t/2) + i\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}t/2))$ são soluções reais linearmente independentes pode-se escrever a solução geral real da equação homogénea na forma

$$x_{hom}(t) = a_1 e^t + a_2 e^{-2t} + a_3 e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + a_4 e^{t/2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}t/2),$$

onde os a_k são constantes reais arbitrárias.

2.b) O termo direito é uma soma de duas funções polinomiais, cada uma delas pode ser escrita na forma $t^k e^{0t}$, e portanto o aniquilador em causa será D^{k+1}. Como o polinómio constante 1 está também no núcleo do aniquilador D^3 pode-se utilizar este polinómio diferencial para ambas as funções do membro direito. Aplicando D^3 a ambos os membros de (3) tem-se $D^3 p(D)x = 0$. Como 0 não é um dos zeros de $p(\lambda)$ (calculados na alínea anterior,) um solução particular da equação não homogénea será do tipo $x_{part}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Substituindo na equação diferencial (3) tem-se $8(a_1 + 2a_2 t) - 8(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 1 + t^2 \Leftrightarrow (8a_1 - 8a_0) + (16a_2 - 8a_1)t - 8a_2 t^2 = 1 + t^2$ e portanto $a_2 = -1/8$, $a_1 = -1/4$ e $a_0 = -1/4$, vindo a solução geral da equação não-homogénea dada por

$$\begin{aligned} x_{hom}(t) &= x_{hom}(t) + x_{part}(t) \\ &= a_1 e^t + a_2 e^{-2t} + a_3 e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + a_4 e^{t/2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}t/2) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}t^2, \end{aligned}$$