Análise Matemática IV

1º semestre, 2004/2005

Exercício-teste 6

1. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{w}+\dfrac{w}{x^2}\right)+\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{w^2}\right)\dfrac{dw}{dx}=0 \\ \\ w(1)=1 \end{cases} \tag{1}$$

   a) Mostre que a equação diferencial de (1) tem um factor integrante $\mu=\mu(xw)$ e determine-o.

   b) Determine uma expressão (eventualmente apenas implícita) para a solução de (1).

   c) Utilizando a expressão obtida na alínea anterior, conclua que o intervalo máximo de definição da solução de (1) é $\mathbb{R}^+$.
   (Sugestão: argumente por redução ao absurdo.)

   d) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, em torno do ponto $x=1$, da solução de (1).
   (Observação: Após ter resolvido esta alínea, é interessante comparar o gráfico da aproximação de Taylor com o gráfico da aproximação numérica que pode obter, por exemplo, utilizando a instrução `NDSolve` *do Mathematica)*

2. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{t}{y}\right)^2+\left(7y^3+\left(\dfrac{t}{y}\right)^3\right)y'=0 \\ \\ y(0)=1 \end{cases} \tag{2}$$

   a) Mostre que a equação diferencial de (2) tem um factor integrante $\mu=\mu(y)$ e determine-o.

   b) Determine uma expressão (eventualmente apenas implícita) para a solução de (2).

   c) Estude o intervalo máximo de definição e o contradomínio da solução de (2).
   (Sugestão: explicite $t=t(y)$ usando a expressão obtida na alínea anterior.)

   d) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, em torno do ponto $t=0$, da solução de (1).
   (Observação: Após ter resolvido esta alínea, é interessante comparar o gráfico da aproximação de Taylor com o gráfico da aproximação numérica que pode obter, por exemplo, utilizando a instrução `NDSolve` *do Mathematica)*

Resolução:

1.a) Seja $v = xw$. Multiplicando a equação diferencial por $\mu(v)$ tem-se

$$\left(\frac{3}{w} + \frac{w}{x^2}\right)\mu + \left(\frac{3}{x} + \frac{x}{w^2}\right)\mu\frac{dw}{dx} = 0.$$

Para que μ seja um factor integrante é suficiente que se tenha, em algum conjunto simplesmente conexo,

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\mu\left(\frac{3}{w} + \frac{w}{x^2}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{3}{x} + \frac{x}{w^2}\right)\right).$$

Efectuando os cálculos indicados e simplificando a expressão obtida tem-se

$$2\left(\frac{x}{w} - \frac{w}{x}\right)\mu' = 4\left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{x^2}\right)\mu$$

e portanto, $\mu' = \frac{2}{xw}\mu$. Como esta equação diferencial só envolve a variável xw a sua solução será também função apenas desta variável. Integrando a equação obtem-se $\mu(xw) = e^{2\log xw} = (xw)^2$.

b) Note-se que os cálculos efectuados acima não são válidos se $xw = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee w = 0$, portanto, para que a equação dada, após ser multiplicada pelo factor integrante determinado acima, seja exacta, há que trabalhar numa região simplesmente conexa que respeite esta restrição. Atendendo a que a solução de (1) tem de satisfazer a condição inicial, e portanto passar pelo ponto $(1,1)$, a maior região simplesmente conexa possível é o primeiro quadrante $\Omega = \{x > 0, w > 0\}$. Em Ω a equação multiplicada pelo factor integrante $(xw)^2$ é exacta, ou seja, existe um potencial $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\Phi = \left(3x^2w + w^3, 3xw^2 + x^3\right).$$

Portanto tem-se

$$\Phi(x,w) = x^3w + xw^3 + h_1(w) \quad \text{e} \quad \Phi(x,w) = xw^3 + x^3w + h_2(x)$$

pelo que se tem de ter $h_1(w) = h_2(x) = C$, onde C é uma constante real. Conclui-se então que a solução de (1) é dada (implicitamente) por $\Phi(x,w) = 0$ desde que a constante C seja tal que a condição inicial seja satisfeita, ou seja $1^31 + 1\cdot 1^3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$. A expressão pretendida é então

$$x^3w + xw^3 = 2. \tag{3}$$

c) Escreva-se a equação diferencial em (1) como

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{\frac{3}{w} + \frac{w}{x^2}}{\frac{3}{x} + \frac{x}{w^2}}. \tag{4}$$

Atendendo à condição inicial, o intervalo máximo de existência da solução, I, tem de ser tal que $1 \in I$. Por outro lado, $0 \notin I$ visto que a equação diferencial não está definida sobre os eixos coordenados, como se viu na alínea a). Portanto $I \subseteq \mathbb{R}^+$. Para vermos que se tem de facto $I = \mathbb{R}^+$ vamos mostrar que não pode ser $I =]a,b[$ com $a > 0$ ou com $b < +\infty$. Suponhamos que $a > 0$ Então teria de se ter, quando $x \downarrow a$, ou $w(x) \to +\infty$,, ou $w(x) \to 0$, pois se $w(x) \to c > 0$ então o ponto limite (a,c) estaria no primeiro quadrante e portanto no dominio da função no membro direito de (4). Como esta é $\mathcal{C}^1$ (e, em particular, localmente Lipschitz em relação a x) no seu domínio, o Teorema de Picard-Lindelöf poderia ser aplicável para garantir a existência de solução num intervalo suficientemente pequeno centrado em $x = a$, ou seja, em particular, a solução existiria para alguns pontos $x < a$ e portanto $I =]a, b[$ não seria o intervalo máximo. Observe-se que também não é possível ter $w(x) \to 0$ quando $x \downarrow a$, independentemente do que a possa ser, visto que nesse caso, aplicando limites quando $x \downarrow a$ à expressão (3) se obteria o resultado absurdo $0 = 2$. Conclui-se daqui que se tem se ter $a = 0$ e $w(x) \to +\infty$.

Exactamente o mesmo argumento mostra que se tem de ter $b = +\infty$ e $w(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$. Um outro modo de concluir este resultado é observando que a expressão implicita (3) para $w(x)$ é invariante para a troca de x com w, ou seja, o gráfico da solução é simétrico em relação à recta bissectora do primeiro quadrante, $w = x$, e portanto o resultado para a direita de $x = 1$ é imediatamente obtido a partir do resultado para válido à esquerda desse mesmo ponto (observe-se que o ponto inicial $(1, 1)$ está sobre a recta bissectora.)

d) Directamente de (1) conclui-se que $w(1) = 1$, e, de (4) $w'(1) = -\frac{3+1}{3+1} = -1$ Além disto, pelo Teorema da diferenciabilidade das funções compostas, temos

$$
\begin{aligned}
& w''(x) = \\
= \quad & \frac{d}{dx}\left(w'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\frac{3}{w}+\frac{w}{x^2}}{\frac{3}{x}+\frac{x}{w^2}}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2w+w^3}{3xw^2+x^3}\right) \\
= \quad & -\frac{(6xw+3x^2w'+3w^2w')(3xw^2+x^3)-(3w^2+6xww'+3x^2)(3x^2w+w^3)}{(3xw^2+x^3)^2}
\end{aligned}
$$

e utilizando os valores $w(1) = 1$ e $w'(1) = -1$ já calculados, obtemos $w''(1) = 0$ e portanto o polinómio de Taylor pedido no enunciado é $P_2(x) = 1 - 1(x - 1) = 2 - x$. Como complemento a este resultado pode-se observar, heuristicamente, quão boa (ou má...) é a aproximação de Taylor no presente caso, em comparação com a aproximação numérica fornecida pelo Mathematica:

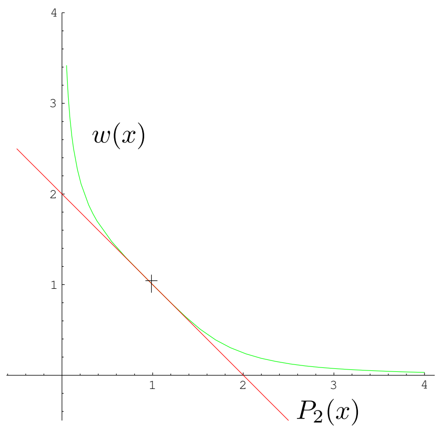

Figura 1: Comparação entre os gráficos do polinómio de Taylor $P_2(x)$ (a vermelho) e da aproximação numérica obtida utilizando a instrução `NDSolve` do Mathematica (a verde). A cruz a preto indica a condição inicial.

2.a) Multiplicando a equação diferencial por $\mu(y)$ tem-se

$$\left(3\left(\frac{t}{y}\right)^2\right)\mu + \left(7y^3 + \left(\frac{t}{y}\right)^3\right)\mu\frac{dy}{dt} = 0.$$

Para que μ seja um factor integrante é suficiente que se tenha, em algum conjunto simplesmente conexo,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu 3\left(\frac{t}{y}\right)^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\left(7y^3 + \left(\frac{t}{y}\right)^3\right)\right).$$

Efectuando os cálculos indicados e simplificando a expressão obtida tem-se $\mu' = \frac{3}{y}\mu$. Como esta equação diferencial só envolve a variável independente y, a sua solução será também função apenas desta variável. Integrando a equação obtem-se $\mu(y) = e^{3\log y} = y^3$.

b) Note-se que os cálculos anteriores são válidos se $y \neq 0$, ou seja, atendendo a que a condição inicial é $y(0) = 1 > 0$, e a que uma funcção contínua transforma intervalos em intervalos[1] o contradomínio da solução de (2) terá de estar contido em $\mathbb{R}^+$.

Para que a equação dada seja exacta após multiplicação pelo factor integrante $\mu(y) = y^3$, calculado na alínea anterior, é suficiente que se esteja a trabalhar numa região simplesmente conexa de $\mathbb{R}^2$. Atendendo à restrição para y referida acima, podemos considerar a maior região simplesmente conexa o conjunto $\Omega = \left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$. Em Ω a equação multiplicada pelo factor integrante y^3 é exacta, ou seja, existe um potencial $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\Phi = \left(3t^2 y, 7y^6 + t^3\right).$$

Portanto tem-se

$$\Phi(t,y) = t^3 y + h_1(y) \quad \text{e} \quad \Phi(t,y) = y^7 + t^3 y + h_2(t)$$

pelo que se tem de ter $h_1(y) = h_2(t) = C$, onde C é uma constante real. Conclui-se então que a solução de (1) é dada (implicitamente) por $\Phi(t,y) = 0$ desde que a constante C seja tal que a condição inicial seja satisfeita, ou seja $1^7 + 0^3 \cdot 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1$. A expressão pretendida é então

$$y^7 + t^3 y = 1. \tag{5}$$

c) Multiplicando a equação diferencial em (2)pelo factor integrante $\mu(y) = y^3$ pode-se escrever

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3t^y}{7y^6 + t^3}. \tag{6}$$

Sabemos da alínea anterior que a solucção desta equação diferencial que satisfaz a condição inicial em (2) é dada implicitamente por (5), a qual pode ser usada para explicitar t como função de y, obtendo-se

$$t(y) = -\sqrt[3]{\frac{1-y^7}{y}}, \tag{7}$$

onde $y > 0$. Atendendo a que, para todos os valores de $y \neq 1$,

$$\frac{dt}{dy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{y}{y^7}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1+6y^7}{y^2} \in \mathbb{R}^-$$

e atendendo a que $t(1) = 0$ corresponde à condição inicial em (2), para a qual sabemos, pelo Teorema de Picard-Lindelöf[2] que a equação tem solução local única. Isto, conjuntamente com resultado sobre a derivada de $t(y)$ mostra que $t(y)$ é monótona decrescente e está definida em todo o $\mathbb{R}$. Consequentemente esta função é invertível e a sua inversa, $y(t)$, tem como domínio o contradomínio de $t(y)$. Atendendo a que é estritamente decrescente e a que, a partir de (7), se tem $\lim_{y\to 0^+} t(y) = +\infty$ e $\lim_{y\to+\infty} t(y) = -\infty$, obtem-se imediatamente que o intervalo máximo de existência da solução de (2) é $I = \mathbb{R}$.

[1] A solução é, de acordo com a definição que adoptamos, uma função de classe $\mathcal{C}^1$, e portanto é contínua.

[2] A função racional no membro direito de (6) é $\mathcal{C}^\infty$ em qualquer vizinhança de $(t,y) = (0,1)$ em Ω, e portanto as condições do Teorema (relembre quais são elas!!) são satisfeitas.

d) Directamente de (2) conclui-se que $y(0) = 1$, e, de (6) $y'(0) = -\frac{0}{7+0} = 0$ Além disto, pelo Teorema da diferenciabilidade das funções compostas, temos

$$\begin{aligned} y''(t) &= \\ &= \frac{d}{dt}\left(y'(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3t^y}{7y^6+t^3}\right) \\ &= -\frac{(6ty+3t^2y')(7y^6+t^3)-(42y^5y'+3t^2)3t^2y}{(7y^6+t^3)^2} \end{aligned}$$

e utilizando os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ já calculados, obtemos $y''(0) = 0$ e portanto o polinómio de Taylor pedido no enunciado é $P_2(t) = 1+0t+\frac{0}{2!}t^2 \equiv 1$. Como complemento a este resultado pode-se observar, heuristicamente, quão boa (ou má...) é a aproximação de Taylor no presente caso, em comparação com a aproximação numérica fornecida pelo Mathematica:

-

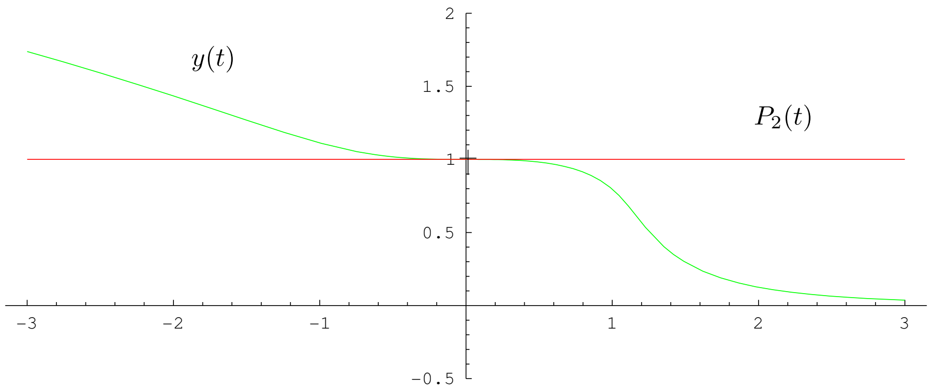

Figura 2: Comparação entre os gráficos do polinómio de Taylor $P_2(t)$ (a vermelho) e da aproximação numérica obtida utilizando a instrução `NDSolve` do Mathematica (a verde). A cruz a preto indica a condição inicial.