Análise Matemática IV

1º semestre, 2004/2005

Exercício-teste 6

1. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{w} + \dfrac{w}{x^2}\right) + \left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{w^2}\right)\dfrac{dw}{dx} = 0 \\ \\ w(1) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

   a) Mostre que a equação diferencial de (1) tem um factor integrante $\mu = \mu(xw)$ e determine-o.

   b) Determine uma expressão (eventualmente apenas implícita) para a solução de (1).

   c) Utilizando a expressão obtida na alínea anterior, conclua que o intervalo máximo de definição da solução de (1) é $\mathbb{R}^+$.
   (Sugestão: argumente por redução ao absurdo.)

   d) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, em torno do ponto $x = 1$, da solução de (1).
   (Observação: Após ter resolvido esta alínea, é interessante comparar o gráfico da aproximação de Taylor com o gráfico da aproximação numérica que pode obter, por exemplo, utilizando a instrução `NDSolve` *do Mathematica)*

2. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{t}{y}\right)^2 + \left(7y^3 + \left(\dfrac{t}{y}\right)^3\right)y' = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

   a) Mostre que a equação diferencial de (2) tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

   b) Determine uma expressão (eventualmente apenas implícita) para a solução de (2).

   c) Estude o intervalo máximo de definição e o contradomínio da solução de (2).
   (Sugestão: explicite $t = t(y)$ usando a expressão obtida na alínea anterior.)

   d) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, em torno do ponto $t = 0$, da solução de (1).
   (Observação: Após ter resolvido esta alínea, é interessante comparar o gráfico da aproximação de Taylor com o gráfico da aproximação numérica que pode obter, por exemplo, utilizando a instrução `NDSolve` *do Mathematica)*