Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 2: 26/9/04 a 1/10/04

1. Estabeleça as seguintes identidades (onde, na última alínea, $z = x + iy$)

(a) $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$	(b) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sh}(z)$
(c) $\lvert \cos z\rvert^2 + \lvert \operatorname{sen} z\rvert^2 = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z$	(d) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
(e) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$	(f) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$

2. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função logaritmo o ângulo correspondente à restrição principal) de:

$$\text{(a)}\quad \log(-1) \qquad \text{(b)}\quad \log\frac{1-i}{\sqrt{2}} \qquad \text{(c)}\quad i^i \qquad \text{(d)}\quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$$

3. Determine todas as soluções das seguintes equações em $\mathbb{C}$

$$\text{(a)}\quad e^z = -1 \qquad \text{(b)}\quad \operatorname{sen}(2z) = 5 \qquad \text{(c)}\quad \log z = 1 + 2\pi i \qquad \text{(d)}\quad e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0$$

4. Definindo $w = \operatorname{arcsen} z$ se e só se $\operatorname{sen} w = z$ mostre que

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

5. Determine o conjunto de pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada:

$$\text{(a)}\quad xy - ix \qquad \text{(b)}\quad e^{xy} - e^{-xy} + ixy \qquad \text{(c)}\quad z^2 - 3z \qquad \text{(d)}\quad \frac{1}{z-i} \qquad \text{(e)}\quad z - \bar{z}$$

6. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = |z|^2 - \frac{1}{2}\bar{z}^2$. Determine os subconjuntos de $\mathbb{C}$ onde f é diferenciável e onde f é holomorfa. Calcule $f'(z)$ onde f fôr diferenciável.

7. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x, y) = (0, 0)$.

   b) Verifique que $f'(0)$ não existe e explique porque é que isto não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann.

8. Mostre que se f e $\bar{f}$ são funções inteiras (i.e., holomorfas em todo o $\mathbb{C}$), então f é constante.

9. Mostre que em coordenadas polares as equações de Cauchy-Riemann se escrevem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

   e aproveite este resultado para mostrar que a seguinte função

$$h(z) = h(\rho e^{i\theta}) = 2 \log \frac{\rho}{2} + i2\theta$$

   é holomorfa no seu domínio $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[$. Calcule $h'(z)$.