

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 3

1. Determine $\int_C f(z)dz$, onde C é o caminho fechado constituído pela semi-circunferência superior $|z| = 1$ e pelo segmento de recta unindo -1 a 1 e

(a) $f(z) = e^z$.

(b) $f(z) = |z|\bar{z}$.

2. Calcule $\int_\gamma x dz$, onde γ é a curva:

(a) $\gamma(t) = t(1 + i)$, $0 \leq t \leq 1$,

(b) $\gamma(t) = (\sin t)(1 + i)$, $0 \leq t \leq \pi/2$,

(c) $\gamma(t) = \frac{1+i}{2} + \frac{e^{it}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$.

3. Seja

$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \quad |z| > 0 \text{ e } 0 < \arg z < 2\pi.$$

Calcule $\oint_{|z|=1} f(z) dz$, onde a curva é percorrida no sentido positivo.

4. Considere a função

$$y(t) = \begin{cases} t^3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{t} \right) & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que $\gamma(t) = t + iy(t)$ para $0 \leq t \leq 1$ é uma curva regular.

(b) Calcule

$$\int_\gamma dz \quad \text{e} \quad \int_\gamma e^{\pi z} dz.$$

5. Utilizando a desigualdade $\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt$, onde $a \leq b$ mostre que para qualquer ponto x no intervalo fechado $[-1, 1]$ o polinómio de Legendre $P_n(x)$ dado por

$$P_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right)^n d\theta \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

satisfaz a desigualdade $|P_n(x)| \leq 1$.

6. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então

$$\left| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \pi \frac{R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}.$$

7. Seja C um caminho fechado simples com orientação positiva. Mostre que a área no interior de C pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2i} \int_C \bar{z} dz.$$

Sugestão: Utilize o teorema de Green.

8. Designa-se por R a região $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } \arg z \neq \pi\}$. Portanto $R = \mathbb{C} \setminus \{x + i0 : x \leq 0\}$.

- (a) Mostre que se $\gamma, \sigma : [0, 1] \rightarrow R$ são caminhos regulares tais que $\gamma(0) = \sigma(0)$ e $\gamma(1) = \sigma(1)$ então

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\sigma} \frac{dz}{z}.$$

- (b) Mostre que a função $f : R \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \int_{\gamma_z} \frac{dz}{z},$$

onde $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow R$ é qualquer caminho regular tal que $\gamma_z(0) = 1$ e $\gamma_z(1) = z$ é bem definida.

- (c) Mostre que $f(z)$ é holomorfa e calcule $f'(z)$.