Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 4

1. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e γ_1, γ_2 duas curvas fechadas tais que a sua concatenação é também uma curva fechada. Mostre que $I(-\gamma_1; z_0) = -I(\gamma_1; z_0)$ e $I(\gamma_1 + \gamma_2; z_0) = I(\gamma_1; z_0) + I(\gamma_2; z_0)$. Interprete geometricamente estes resultados.

2. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - i| + |z - 2i| = 2$, percorrida uma vez no sentido positivo. Calcule

   (a) $\oint_\Gamma z^5 e^{z^2 \cos^2 z}\, dz$

   (b) $\oint_\Gamma \frac{z^5 e^{z^2 \cos^2 z}}{2z - i\pi}\, dz$

   (c) $\oint_\Gamma \frac{1}{z^2 (z-i)^3}\, dz$.

   (d) $\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i)^{11}}\, dz$.

3. Calcule

$$\oint_{|z|=5} \frac{4e^z}{(z-3)(z+2)} dz$$

   onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

4. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

   Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\, dz,$$

   onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

5. Seja $f(z) = z^{-2}$.

   (a) Mostre que, para qualquer curva fechada γ satisfazendo $\gamma \not\ni 0$, se tem $\oint_\gamma f = 0$. Esclareça porque é que este facto não contradiz o Teorema de Morera.

   (b) Mostre que f é limitada quando $z \to \infty$. Esclareça porque é que isto não contradiz o Teorema de Liouville.

6. Seja f inteira e periódica com períodos $p > 0$ e $q = a + ib$, com $b \neq 0$. Mostre que f é constante. A condição $b \neq 0$ é fundamental para obter o resultado. Explique porquê e dê um contra-exemplo para o caso $b = 0$.

7. Supondo que f é uma função inteira e que $\mathrm{Re}(f)$ é limitada superiormente, mostre que f é constante.

   Sugestão: Considere a composta $\exp \circ f$.