Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 5

1. Sejam (z_n) e (w_n) duas sucessões complexas.

   a) Mostre a *transformação de Abel:*

   $$\sum_{k=m}^{n} z_k w_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k(w_k - w_{k+1}) - S_{m-1}w_m + S_n w_n,$$

   onde $1 \leq m \leq n$, $S_0 = 0$ e $S_k = z_1 + \ldots + z_k$ para $k \geq 1$.

   b) Mostre o seguinte *critério de Dirichlet:* Se a sucessão (w_n) é real, positiva e $w_n \to 0$ monotonamente e se a sucessão das somas parciais da série $\sum z_n$ é limitada, então a série $\sum z_n w_n$ é convergente.

   c) Mostre o seguinte *critério de Abel:* Se a sucessão (w_n) é real, limitada e monótona, e se a série $\sum z_n$ é convergente, então a série $\sum z_n w_n$ é convergente.

2. Estude a natureza (convergência, convergência absoluta, ou divergência) das séries

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi i/n}}{n}$. c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen}(in)}{3^n}$,

3. Calcule os raios de convergência das seguintes séries de potências:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n^4+1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-i)^n$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2}$.

4. Considere a seguinte série de potências

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 5^{-n} & \text{se } n \text{ par} \\ 3^{-n} & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}.$$

   Sabendo que esta é a série de Maclaurin de uma função f, holomorfa em todo o seu domínio, calcule $f(1)$.

5. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos seguintes pontos:

   (a) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.

   (b) e^z , em torno de $z = i2\pi$.

   (c) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.

6. Para cada função e região indicada, determine os desenvolvimentos de Laurent:

   (a) $\frac{1}{z-1}$, $|z| > 1$.

   (b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z \right)$, $|z| > 0$.

   (c) $\frac{z-i}{(z-2i)^2}$, $|z-i| > 1$.

   (d) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right)$, $|z| > 0$.

7. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2-1)^2}$ nas seguintes regiões:

   (a) $0 < |z-1| < 2$.

   (b) $2 < |z-1|$.

   e calcule os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$.

   (b) $\displaystyle\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$

8. Calcule
$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{\left((z-i)^2 + (z-i) - 6\right)(z-i)^{20}}\, dz \ .$$

   Sugestão: Considere $\xi = z - i$ e desenvolva $\frac{1}{\xi^2+\xi-6}$ em série de potências de ξ.

9. Considere a *função zeta de Riemann* definida por
$$\zeta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}.$$

   Recorrendo ao Teorema da Convergência Holomorfa, mostre que $\zeta(z)$ é holomorfa em $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$.
   (Esta função é extremamente importante em Teoria Analítica dos Números e o mais famoso problema actualmente em aberto da Matemática, a *conjectura de Riemann,* diz respeito à localização dos zeros (do prolongamento analítico) da função zeta.)

10. Seja (z_n) uma sucessão em $\mathbb{C}$ com $z_k \neq -1, \forall k$. O producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ diz-se convergente se a sucessão dos productos parciais $(\prod_{k=1}^{n}(1+z_k))$ converge em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ quando $n\to\infty$, sendo então

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+z_k).$$

   a) Mostre que se $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ converge então $z_k \to 0$.

   b) Suponha que $|z_k|<1$. Mostre que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ converge se e só se $\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+z_k)$ converge, onde $\log(\cdot)$ é o ramo principal do logaritmo.

   c) Mostre que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z_k|)$ é convergente se e só se $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|$ é convergente.

   d) Mostre que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_k)$ é convergente sempre que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z_k|)$ também o fôr.

11. Considere a função zeta de Riemann $\zeta(z)$, holomorfa em $\operatorname{Re} z > 1$. Seja $\{p_1, p_2, \ldots\}$ o conjunto de todos os números primos.

   a) Mostre, por indução, que

$$(1-p_1^{-z})(1-p_2^{-z})\cdot\ldots\cdot(1-p_n^{-z})\zeta(z) = 1 + \sum_{m\in\mathcal{P}_n} m^{-z}.$$

   onde $\mathcal{P}_n$ é o conjunto dos inteiros maiores que 1 e que não são diviziveis por qualquer dos primos $p_1,\ldots,p_n$.

   b) Conclua que, em $\operatorname{Re} z > 1$, se tem

$$\zeta(z) = \frac{1}{\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-z})}.$$