Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 6

1. Determine as expansões em série de Laurent das seguintes funções, em torno do ponto z_0 designado, diga em que regiões são válidas, classifique o tipo de singularidades e calcule $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

   a) $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$ em $z_0 = -1$.

   b) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3}$ em $z_0 = 0$.

   c) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{(z-1)^2}}$ em $z_0 = 1$.

   d) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ em $z_0 = 0$.

2. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções e calcule os resíduos correspondentes

   a) $f(z) = \frac{1+\cos z}{z-\pi}$.

   b) $f(z) = \frac{z}{(z^2+2)^2}$.

   c) $f(z) = \frac{1}{z^7(1-z^4)}$.

   d) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(1-z^2)}$.

   e) $f(z) = z^2 e^{z^{-1}}$.

3. Justifique que a função $g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/z)}$ tem uma singularidade em $z = 0$, a qual não é isolada.

4. Sendo as curvas fechadas em causa percorridas uma vez em sentido directo, calcule

   a) $\displaystyle\int_{|z|=7} \frac{1}{e^{z^2}-1}dz$

   b) $\displaystyle\int_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}dz$

   c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z-1}{z^3}dz$

5. Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, calcule os seguintes integrais reais

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}d\theta$

   c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}d\theta$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen}\theta} d\theta$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx, \quad (a, b > 0,\ a \neq b)$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$

Sugestão: Considere a região $\{z = \rho e^{i\theta} : \rho \in (0, R), R > 1,\ \theta \in (0, 2\pi i/n)\}$

6. Seja $f(z)$ holomorfa com um pólo simples (i.e., de ordem 1) em z_0. Seja γ_r um arco de circunferencia de raio r, ângulo α, centrado em z_0. Mostre que

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \alpha i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Observação: Este resultado é muito útil na aplicação do Teorema dos Resíduos ao cálculo de integrais reais com singularidades na recta real.

7. Seja γ a recta $\operatorname{Re}(z) = \alpha$, com $\alpha > 0$, percorrida de $\operatorname{Im} z < 0$ para $\operatorname{Im} z > 0$. Suponha que φ é holomorfa em $A \stackrel{\text{def}}{=} \{z : \operatorname{Re}(z) \leq \alpha\}$, excepto num número finito de singularidades $a_1, \ldots, a_n$ no interior de A, e é tal que existem constantes positivas ρ e β tais que $|\varphi(z)| \leq \rho |z|^{-\beta}$ para todos os $z \in A$ com $|z|$ suficientemente grande. Mostre que, para $t > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{zt} \varphi(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(e^{zt}\varphi(z), a_k),$$

e aproveite este resultado para calcular o integral nos casos em que $\varphi(z) = z^{-(n+1)}$ e $\varphi(z) = (z^2+1)^{-1}$.
Sugestão: Considere os rectângulos de A simétricos relativamente ao eixo real, de comprimento $R + \alpha$ e altura $2R$ com um dos lados em ∂A e R suficientemente grande.
Observação: O tipo de integrais considerados neste exercício é importante para o estudo da Transformada de Laplace, a ser feito mais adiante na disciplina.