# Análise Matemática IV

**Problemas para as Aulas Práticas**

## Semana 7

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

   a) $y' = \frac{1}{1+t^2}$.

   b) $x' = -tx$.

   c) $\psi' = \psi - t$.

   d) $g'(t) = 2tg(t) + t$

   e) $w' = \frac{2t}{t^2+1}w + t^2 - 1$.

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de valores iniciais[1]

   a) $x' = 2tx + t, \; x(0) = 1$.

   b) $\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v - \frac{1}{1+u^2} = 0, \; v(0) = 1$.

   c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

3. Determine uma solução *contínua* do problema de Cauchy seguinte

$$\begin{cases} y'(x) &= -y(x) + 2 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad x \geq 0, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

   onde $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ é a função característica do intervalo $[0,1]$, definida por

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1], \\ 0 & \text{se } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

4. O modelo mais simples para evaporação de uma gota de água esférica é supor que a diminuição de volume da gota se processa a uma taxa proporcional à sua superfície. Qual o tempo necessário para que uma gota de raio $R_0$ se evapore completamente?

5. Num reservatório contendo um quilolitro de água é introduzido um resíduo industrial a um caudal de um litro por minuto. A mistura é instantaneamente homogeneizada e despejada do reservatório à mesma taxa. Determine a concentração do resíduo no reservatório ao fim de $T$ minutos e calcule quanto tempo é necessário decorrer até a concentração do resíduo atingir 20%.

6. Dada uma equação diferencial $\dfrac{dy}{dt} + a(t)\,y = f(t)$ com $a(t)$ e $f(t)$ contínuas em $\mathbb{R}$, $a(t) \geqslant c > 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, mostre que todas as soluções tendem para zero quando $t$ tende para $+\infty$.

[1] *Os problemas de valores iniciais* são também chamados *problemas de Cauchy*.

7. Considere as matrizes $I_n$, $N_m$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Determine as suas normas $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$ e espectral.

   b) Determine os seus raios espectrais.

   c) Sendo $A$ cada uma das matrizes acima, determine a natureza das séries

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \left(A^j - A^{j+1}\right).$$

8. Seja $A$ uma matriz quadrada de dimensão $n$. Suponha que $A^2 = \alpha A$, para algum escalar $\alpha$. Determine $e^{At}$.

9. Considere a matriz $N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que esta matriz é nilpotente e calcule $e^{N_3 t}$.

10. Considere as seguintes matrizes:

$$\text{(i)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para cada uma das matrizes $\mathbf{A}$ acima indicadas, responda às seguintes questões:

(a) Calcule $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ e $\mathbf{A}^4$.

(b) Intua uma fórmula para $\mathbf{A}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e demonstre-a pelo princípio de indução matemática.

(c) Calcule $e^{t\mathbf{A}}$ através da definição.