Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 10

1) Determine a solução da equação escalar linear:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y = b(t),$$

que verifica as condições iniciais:

$$y(0) = y'(0) = 0, y^{(2)}(0) = 1,$$

quando, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$b(t) = 0, \quad b(t) = 2t, \quad b(t) = e^t, \quad b(t) = \cos t.$$

2) Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t + \cos t \tag{1}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (1)

(ii) Determine uma solução particular de (1)

(iii) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

3) Seja $k > 0$. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação:

$$y^{(2)} - 2cy' + y = 0$$

admite uma solução satisfazendo $y(0) = y(2k\pi) = 0$, que não seja identicamente nula?

4) Considere a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{2}$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$.

(i) Usando uma mudança de variáveis adequada transforme (2) num sistema linear de primeira ordem

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}, \tag{3}$$

e identifique explicitamente a matriz $A(t)$.

(ii) Sendo $W(t)$ uma matriz wronskiana de (3), mostre que $(\det W(t))' = -p(t) \det W(t)$.

(iii) Conclua que se todas as soluções $x(t)$ de (2) satisfazem $(x(t), x'(t)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, então

$$\int_0^{+\infty} p(t)dt = +\infty.$$

5) Considere a equação do pêndulo gravítico linear com amortecimento viscoso

$$x'' + 2\lambda_0 x' + \frac{g}{L}x = F(t),$$

onde $g > 0$, $L > 0$ e $\lambda_0 \geq 0$ são constantes.

a) Considerando nesta alínea o pêndulo livre (i.e., $F(t) \equiv 0$,) determine para que valores do coeficiente de amortecimento λ_0 é que o movimento do pêndulo é monótono a partir de determinado instante (i.e., *não* é oscilatório.)

b) Seja agora o caso em que $\lambda_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e $F(t) = F_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$. Determine a expressão da solução que satisfaz a condição inicial $x(0) = x'(0) = 0$.

6) Considere um sistema de duas esferas de massas iguais m, presas por molas iguais com módulo de Young igual a E, que se movem sem atrito numa superficie horizontal, tal como se representa na figura. O afastamento de cada esfera em relação à respectiva posição de equilíbrio é $x(t)$ e

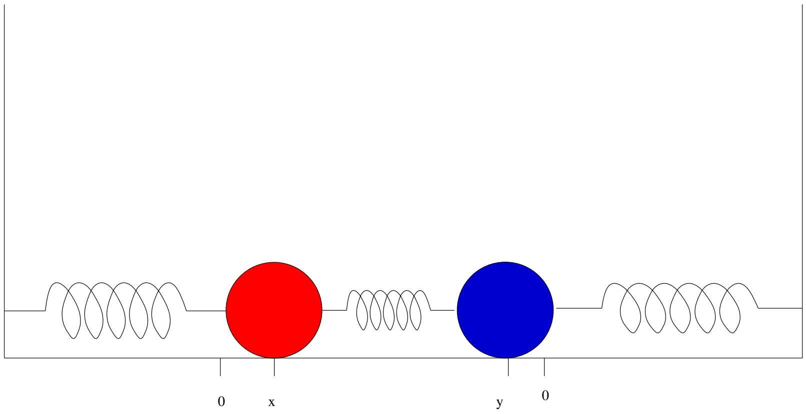

Figura 1: O Sistema das duas esferas com molas

$y(t)$. A equação de movimento do sistema é

$$\begin{cases} mx'' = -Ex + E \cdot (y - x) \\ my'' = -Ey + E \cdot (x - y) \end{cases} \tag{4}$$

Considere, para simplificar os cálculos, que as unidades são escolhidas de modo a que $\frac{E}{m} = 1$.

a) Transforme (4) num sistema linear de primeira ordem.

b) Determine a solução geral *real* de (4).

c) Se uma força exterior periódica actuar sincronicamente na esferas o sistema será

$$\begin{cases} mx'' = -Ex + E \cdot (y - x) + f_1(t) \\ my'' = -Ey + E \cdot (x - y) + f_2(t). \end{cases} \tag{5}$$

Considere a seguinte força exterior:

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cos(\omega t)$$

com $A, B \in \mathbb{R}$ e $\omega > 0$. Estude em que circunstâncias poderá ocorrer resonância no sistema (5).