Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 8

1. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y - z \\ z' = -z + \beta(t) \end{cases}$$

onde $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

a) Escreva-o na forma vectorial $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ indicando explicitamente quais são os vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{b}$ e qual é a matriz A.

b) Determine a matriz fundamental e^{At} do sistema.

2. Determine a solução geral dos seguintes sistemas lineares

a) $\begin{cases} x' = x + z \\ y' = y - z \\ z' = -2x - z \end{cases}$

b) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

3. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

a) Determine os valores e vectores próprios da matriz do sistema.

b) Determine a solução geral do sistema.

4. Considere o sistema $\begin{cases} u'' + w' + u - w &= 0 \\ u' + w' + u - w &= 0 \end{cases}$

a) Verifique que o sistema é linear.

b) Utilize uma mudança de variáveis apropriada para transformá-lo num sistema de equações de *primeira ordem.*.

c) Determine a solução geral do sistema dado.

5. Determine a solução dos problemas de Cauchy seguintes

a) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^T = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

b) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^T = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

6. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

1. Seja $\varepsilon = 0$.

   a) Determine todos os vectores próprios e vectores próprios generalizados da matriz do sistema.

   b) Determine a solução geral real do sistema.

2. Seja agora $\varepsilon \neq 0$.

   a) Atendendo à estrutura da matriz do sistema, obtenha dois sistemas bidimensionais (não necessariamente homogéneos) que sejam "equivalentes" ao sistema quadridimensional dado; estabeleça com precisão o que deve ser entendido por "equivalentes" na frase anterior.

   b) Calcule a solução do sistema com $\varepsilon = 1$ que satisfaz a condição inicial $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{e}_4$.