

Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

Semana 9

1. Determine a solução dos problemas de valores iniciais seguintes

a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ te^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$

b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$

2. Esboce os retratos de fase dos sistemas $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ onde A é a seguinte matriz

a) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Considere o sistema linear $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

- a) Determine todos os pontos de equilíbrio do sistema e estude-os quanto à estabilidade.
- b) Identifique o maior subespaço invariante L de \mathbb{R}^4 tal que a restrição do sistema a L tenha um único ponto de equilíbrio.
- c) Esboce o retrato de fase da restrição do sistema ao subespaço identificado na alínea anterior.

4. Considere um sistema tridimensional de equações diferenciais ordinárias, lineares, autónomas e homogêneas, para o qual se sabe que $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$ são os únicos valores próprios *distintos* da matriz do sistema e que os correspondentes espaços próprios são ortogonais.

- a) Quantos retratos de fase qualitativamente distintos existem correspondentes a esta situação?
- b) Estude a estabilidade da solução nula em todas os casos identificados.
- c) Esboce todos os possíveis retratos de fase qualitativamente distintos.

5. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- a) Determine o(s) ponto(s) de equilíbrio do sistema e estude-o(s) quanto à estabilidade.

b) Determine um subespaço L de \mathbb{R}^3 tal que o(s) equilíbrio(s) da restrição do sistema a L seja(m) assintoticamente estável(eis) e que L tenha a maior dimensão possível.

c) Esboce o retrato de fases do sistema dado.

6. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Identifique um subespaço tridimensional de \mathbb{R}^4 , L_3 , que seja invariante para o sistema dado e tal que a solução estacionária da restrição seja assintoticamente estável.

b) Esboce o retrato de fases da restrição do sistema dado ao subespaço L_3 que determinou na alínea anterior.