Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

$\boxed{\textbf{Semana 11}}$

1. Determine *todas* as soluÁıes das equaÁıes diferenciais

   a) $\varphi' = e^{\varphi - t}$ b) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$ c) $f' = \frac{f+x}{x}$ (considere $g = f/x$.)

2. Considere a equaÁ„o diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

   onde $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ s„o funÁıes reais definidas e contÌnuas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que a mudanÁa de vari·veis $y(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t)^{1-n}$ transforma a equaÁ„o dada numa equaÁ„o linear e aproveite este facto para obter a soluÁ„o geral.

3. Suponha que se deita ·gua com um caudal de 1 metro c˙bico por segundo para dentro de um cone de eixo vertical e com uma abertura de $\pi/2$. Designe por $h(t)$ a altura de ·gua, em metros, no cone, no instante t. Suponha ainda que a ·gua se escoa pelo vertice com um caudal proporcional ‡ altura de ·gua no cone, sendo $\alpha > 0$ a constante de proporcionalidade.

   a) Sabendo que o volume de um cone È igual a um terÁo do produto da ·rea da base pela altura, mostre que a equaÁ„o diferencial para $h(t)$ È

$$h' = \frac{1 - \alpha h}{\pi h^2}$$

   b) *Sem resolver a equaÁ„o* determine a constante de escoamento α de modo a que a altura limite de ·gua no cone, $h_\infty = \lim_{t\to+\infty} h(t)$, seja de 1 metro.

   c) Determine uma express„o para a soluÁ„o que satisfaz a condiÁ„o inicial $h(t_0) = h_0$ metros.

4. Considere a equaÁ„o diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{4y^3 + x^2}.$$

   a) Mostre que esta equaÁ„o È exacta.

   b) Determine uma express„o para a soluÁ„o que satisfaz a condiÁ„o inicial $y(1) = 1$.

   c) Determine o intervalo m·ximo de existÍncia da soluÁ„o da alÌnea anterior.

5. Considere a equaÁ„o diferencial

$$y + (4y^2 + 2x)\frac{dy}{dx} = 0.$$

   a) Mostre que esta equaÁ„o tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

   b) Determine uma express„o (se possÌvel explÌcita) para a soluÁ„o que satisfaz a condiÁ„o inicial $y(1) = 1$.

   c) Determine o intervalo m·ximo de existÍncia da soluÁ„o da alÌnea anterior.

6. Considere a equaÁ„o diferencial

$$\frac{y}{x} + (y^3 + \log x)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

a) Verifique que tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$ onde C é uma constante arbitrária e $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$.

c) Determine o intervalo m·ximo de existÍncia da soluÁ„o que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$
Sugestão: Talvez seja útil tentar explicitar $x = x(y)$.

7. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \Big(\operatorname{sen}(x+y) + 2x\cos(x+y)\Big) + 2x\cos(x+y)\frac{dy}{dx} = 0 \\ \\ y(1) = \frac{\pi}{4} - 1 \end{cases} \tag{2}$$

a) Justifique que tem soluÁ„o local ˙nica.

b) Mostre que a equaÁ„o diferencial tem um factor integrante $\mu = \mu(x + y)$ e que a soluÁ„o de pode ser dada implicitamente por $2x\operatorname{sen}^2(x + y) = 1$.

c) Determine uma express„o *explÌcita* para a soluÁ„o e diga qual È o seu intervalo m·ximo.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma funÁ„o contÌnua e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = t(1 + x^2)f(x) \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

a. Considere $f(x) = \pi/4$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Resolva o problema de Cauchy, indicando o intervalo m·ximo de existÍncia da soluÁ„o.

b. Considere agora $f(x) = \operatorname{arctg}\left(1 + x^2\right)$.

i) Justifique, sem tentar resolver explicitamente, que, tambÈm neste caso, o problema de Cauchy tem localmente uma e uma sÛ soluÁ„o.

ii) Mostre que o intervalo m·ximo de existÍncia da soluÁ„o referida em i) È limitado ‡ direita.

9. Sejam $a(t) \in \mathcal{C}^1$ e $b(t) \in \mathcal{C}^0$ duas funÁıes reais definidas em $\mathbb{R}^+$. Suponha que $a(t) > 0$ e considere a equaÁ„o diferencial ordin·ria de segunda ordem

$$(a(t)x')' + b(t)x = 0$$

A mudanÁa de vari·veis $(ax', x) \mapsto (\rho, \theta)$ dada por $ax' = \rho\cos\theta$ e $x = \rho\operatorname{sen}\theta$, usualmente designada por *transformaÁ„o de Prüfer,* transforma a equaÁ„o no sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \theta' = \frac{1}{a(t)}\cos^2\theta + b(t)\operatorname{sen}^2\theta \\ \rho' = \left(\frac{1}{a(t)} - b(t)\right)\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

a) Justifique que os problemas de Cauchy para o sistema tÍm soluÁ„o local ˙nica e mostre que os respectivos intervalos m·ximos de existÍncia s„o ilimitados ‡ direita.
(*Sugest„o: Poder· ser ˙til observar que a primeira equaÁ„o n„o depende de $\rho(t)$.*)

b) Considere $a(t) = 1/t$ e $b(t) = t$. Determine a soluÁ„o que satisfaz a condiÁ„o inicial $x(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$ e $x'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.