Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 13

1. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores na fronteira tÍm soluÁıes n„o triviais.
   (a) $y'' - 2y + (1+\lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
   (b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

2. a) Recorrendo os mÈtodo de separaÁ„o de vari·veis, determine a solução formal geral, para $t \geq 0$ e $x \in [0,1]$, de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & \text{se}\,(\text{t},\text{x}) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[\\ u(t,0) = 0 & \text{se}\,\text{t} > 0 \\ u(t,1) = \text{sen}\,1 & \text{se}\,\text{t} > 0 \end{cases}$$

   (*Sugestão: Para problemas com condições na fronteira* não homogéneas *(como é o presente caso) proceda de um dos seguintes modos:* **1**. *faça uma mudança de variável conveniente $u(t,x) \mapsto \nu(t,x)$ de modo a que para a nova variável ν as condições na fronteira passem a ser homogéneas; OU,* **2**. *escreva $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$ onde o problema para w tem condições homogéneas.*)

   b) Determine a soluÁ„o que satisfaz a condiÁ„o inicial

$$u(x,0) = 3\,\text{sen}(2\pi x) - 7\,\text{sen}(4\pi x) + \text{sen}(x).$$

3. Calcule a sÈrie de Fourier da onda sinusoidal rectificada

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,x & \text{se sen}\,x > 0 \\ 0 & \text{se sen}\,x \leq 0. \end{cases}$$

4. Calcule uma sÈrie de Fourier da funÁ„o $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2H(x) - 1$, onde H È a funÁ„o de Heaviside.

5. Considere a funÁ„o $f(x) = x$ no intervalo $[0,1]$. Para esta funÁ„o, investigando a convergÍncia pontual das sÈries em causa, obtenha uma

   a) sÈrie de Fourier de senos,

   b) sÈrie de Fourier de cosenos,

   c) sÈrie de Fourier de senos e cosenos.

6. Determine a sÈrie de Fourier da funÁ„o $g(x) = x^2$ no intervalo $[-L,L]$. Utilizando a sÈrie obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

7. Seja $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma funÁ„o de classe $\mathcal{C}^1$. Mostre que
$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \qquad \text{onde } b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{T}t\right)dt.$$

8. Considere um fio met·lico isolado, de comprimento 4. A temperatura, no instante $t > 0$, de um ponto do fio com coordenada x È representada por uma funÁ„o $u(t,x) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_x^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_t^1(\Omega)$, onde $\Omega = \mathbb{R}^+ \times]0,4[$ e $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, e que satisfaz o problema de valores iniciais e de fronteira
$$\begin{cases} u_t = \mathcal{D}u_{xx}, & (t,x) \in \Omega \\ u_x(t,0) = u_x(t,4) = 0, & t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), & 0 \le x \le 4, \end{cases} \tag{1}$$
onde $\mathcal{D} > 0$ È uma constante e $\varphi(x) \in \mathcal{C}^0([0,4])$ È a distribuiÁ„o inicial da temperatura no fio.

   a) Determine a soluÁ„o formal geral de (1).
   b) Determine a soluÁ„o formal de (1) quando $\varphi(x) = 4 - x$.
   c) Investigue se a soluÁ„o formal da alÌnea anterior È, ou n„o, uma soluÁ„o cl·ssica.

9. A posiÁ„o de equilÌbrio de uma membrana que cobre um domÌnio limitado Ω È descrita por uma funÁ„o $u = u(x,y) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ que È a soluÁ„o da equaÁ„o de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ em Ω e que satisfaz condiÁıes apropriadas em $\partial\Omega$.

   Seja $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ e considere a seguinte condiÁ„o na fronteira $\partial\Omega$
$$u\,|_{\partial\Omega}\,(x,y) = \begin{cases} f(x) & \text{se } y = 0, \\ 0 & \text{caso contr·rio,} \end{cases}$$
   onde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) = f(1) = 0$.

   a) Determine uma express„o formal para $u(x,y)$.
   b) Mostre que se $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$, ent„o a soluÁ„o formal È uma soluÁ„o cl·ssica (i.e., no sentido indicado acima) da equaÁ„o de Laplace.
   (*Sugest„o: Mostre que sendo f de classe $\mathcal{C}^k([0,1])$ ent„o os coeficientes de Fourier de f convergem para* 0 *pelo menos como* $1/n^k$.)
   (*ObservaÁ„o: De facto, recorrendo a outros mÈtodos n„o estudados nesta disciplina, este resultado pode ser substancialmente melhorado: basta que $u\,|_{\partial\Omega}$ seja contÌnua para que a soluÁ„o formal seja uma soluÁ„o cl·ssica.*)

10. a) Utilize o mÈtodo de separaÁ„o de vari·veis para obter a soluÁ„o formal geral da equaÁ„o das ondas unidimensionais amortecidas
$$u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0 \qquad \text{em} \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[,$$
   com condiÁıes de Dirichlet homogÈneas na fronteira.

   b) Determine a soluÁ„o formal do problema da alÌnea anterior que satisfaz a condiÁ„o inicial $u(0,x) = 0$ e $u_t(0,x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$ no intervalo $[0,1]$.

   c) O que pode concluir quanto ‡ continuidade em $\mathbb{R}_0^+ \times [0,1]$ da soluÁ„o formal obtida em b) ? E quanto ‡ sua diferenciabilidade?