Análise Matemática IV
Problemas para as Aulas Práticas

Semana 12

1. Seja $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Considere o sistema de equa¡ûes diferenciais ordinarias de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) \\ \\ y' = -\frac{\partial V}{\partial y}(x,y). \end{cases}$$

   1. Mostre que $V(x,y)$ ≫ uma fun¡ìo de Liapunov.
   2. Considere a fun¡ìo $V(x,y) = y^2 + (x^2-1)^2$.
      a) Determine o(s) ponto(s) de equilÃbrio.
      b) Linearize em torno do(s) ponto(s) de equilÃbrio. Esboce o(s) retrato(s) de fase do(s) sistema(s) linearizado(s) que obteve.
      c) Utilizando a fun¡ìo de Liapunov V e (quando possÃvel) os resultados da alÃnea anterior, esboce o retrato de fase do sistema.

2. Um sistema hamiltoneano de dimensão finita ≫ um sistema de EDOs do tipo

$$\begin{cases} \vec{q}\,' = D_pH(\vec{q},\vec{p}) \\ \vec{p}\,' = -D_qH(\vec{q},\vec{p}), \end{cases}$$

   onde $H = H(\vec{q},\vec{p}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ≫ uma fun¡ìo com a regularidade suficiente para que o membro direito fa¡a sentido, e que ≫ designada por Hamiltoneano (energia) do sistema. Consideramos neste problema apenas o caso $n = 1$, i.e., q e p são escalares reais.

   1. Mostre que o Hamiltoneano H ≫ uma constante do movimento.
   2. Suponha que $H(q,p) = q^3 - q^2 + p^2$.
      a) Determine o(s) ponto(s) de equilÃbrio.
      b) Linearize em torno do(s) ponto(s) de equilÃbrio.
      c) Esboce o retrato de fase.

   *(Observa¡ìo: Os sistemas Hamiltoneanos são de grande importância em Mecânica, Cálculo de Variações, e Geometria Diferencial (para observar estas três áreas a interagir de um modo muito profícuo consultar:*V.I. Arnold: Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica, Ulmeiro/Mir, Lisboa/Moscovo, 2004*).)*

3. Os movimentos vibratrios de uma mol≫cula diatmica podem ser modelados, em primeira aproxima¡ìo, pela equa¡ìo diferencial

$$x'' + \frac{1}{\mu}\frac{dV}{dx}(x) = 0$$

   onde $x = x(t) > 0$ ≫ a distíncia interatmica, $V = V(x)$ ≫ o potencial interatmico e $\mu > 0$ ≫ a massa reduzida do sistema. Considere as novas vari$\Sigma veisdependentes$x$_1 \stackrel{\text{def}}{=} x$ e $x_2 \stackrel{\text{def}}{=} x'$.

   a) Usando a mudan¡a de vari$\Sigma veisdada, escrevaosistemadeprimeiraordemcorrespondente.Mostrequeaf$
      ìoE(x$_1, x_2) = \frac{1}{2}\mu x_2^2 + V(x_1)$ ≫ uma constante do movimento para o sistema que obteve na alÃnea anterior.