Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 12

1. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores na fronteira têm soluções não triviais.
   (a) $y'' - 2y + (1+\lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
   (b) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

2. Determine a solução formal do seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[\\ u(t,0) = u_x(t,1) = 0 & t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = \operatorname{sen}(x\pi/2) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   e estude a sua regularidade a fim de decidir se a solução obtida é, ou não, uma solução clássica (i.e., de classe $\mathcal{C}^2$) do problema dado.

3. a) Recorrendo os método de separação de variáveis, determine a solução formal geral, para $t \geq 0$ e $x \in [0,1]$, de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & \text{se (t, x)} \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[\\ u(t,0) = 0 & \text{se t} > 0 \\ u(t,1) = \operatorname{sen} 1 & \text{se t} > 0 \end{cases}$$

   (*Sugestão: Para problemas com condições na fronteira* não homogéneas *(como é o presente caso) proceda de um dos seguintes modos:* **1**. *faça uma mudança de variável conveniente $u(t,x) \mapsto \nu(t,x)$ de modo a que para a nova variável ν as condições na fronteira passem a ser homogéneas; OU,* **2**. *escreva $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$ onde o problema para w tem condições homogéneas.*)

   b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = 3\operatorname{sen}(2\pi x) - 7\operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x).$$

4. Iremos considerar um modelo muito simplificado de uma descarga radioactiva num rio.

   Considere-se um trecho de comprimento $L > 0$ de um rio e suponha-se que a velocidade média das águas é constante e igual a $c > 0$. O rio é representado matematicamente pelo intervalo $[0, L]$, sendo a foz localizada em $x = L$. Numa das margens, entre as posições $x = L/100$ e $x = L/50$, está implantada uma central nuclear. Considere-se que uma descarga acidental da central lança no rio um nucleótido radioactivo U com constante de decaimento $\lambda > 0$ e com constante de difusão na água $\mathcal{D} > 0$.

   Sendo $u(x,t)$ a concentração de U no instante t e posição no rio x, a equação que modela a dispersão de U é a seguinte equação de difusão-convexão-reacção

$$u_t = \mathcal{D}u_{xx} - cu_x - \lambda u, \qquad (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}^+ \tag{1}$$

   com condição de Dirichlet homogénea na fronteira.

1.a) Sejam α e β duas constantes reais e considere a função $v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha x+\beta t}u(x,t)$. Mostre que $u(x,t)$ é solução de (1) se e só se $v(x,t)$ fôr solução da equação

$$v_t = \mathcal{D}v_{xx} - (c+2\alpha\mathcal{D})v_x + (\beta + \mathcal{D}\alpha^2 + c\alpha - \lambda)v.$$

b) Determine α e β de modo a que a equação para v seja $v_t = \mathcal{D}v_{xx}$ e identifique a condição na fronteira correspondente.

c) Determine a solução geral formal do problema da alínea anterior.

2. No instante $t=0$ a descarga da central provoca o aparecimento do nucleótido U no rio com concentração $u(x,0) = u_0\chi_{[L/100,L/50]}(x)$, onde $u_0 > 0$ é uma constante e $\chi_A(x)$ é a função característica do conjunto A.

a) Determine a condição inicial $v(x,0)$ para o problema da alínea 1.b).

b) Determine a solução formal do problema da alínea 1.b) correspondente à condição inicial que obteve na alínea anterior.

c) Obtenha a solução formal do problema para $u(x,t)$ originalmente colocado.

5. Considere o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \ \ u_t(x,0) = g(x), & x \in [0,L] \end{cases} \tag{2}$$

onde as funções f e g são suficientemente regulares (digamos, de classe $\mathcal{C}^2$) e $L > 0$ é uma constante.

a) Utilizando técnica de separação de variáveis, escreva uma expressão para a série de Fourier que é solução formal de (2) e indique como calcularia os coeficientes da série.

b) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução de $u_{tt} = u_{xx}$ então existem funções F, $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t). \tag{3}$$

c) Tendo em atenção os resultados das alíneas anteriores determine as expressões das séries de Fourier de F e G.

d) Considere agora $g(x) = 0$ e suponha que o suporte de f é o intervalo $[m,M]$, com $0 < m < M < L$. Usando um argumento geométrico, determine para que suportes $[m,M]$ é que a perturbação inicial f atinge todos os pontos da fronteira do domínio $[0,L]$ no mesmo instante de tempo.
Observação: Sendo $f : A \to \mathbb{R}$, o suporte de f é o conjunto definido por

$$supp f := \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}\,,$$

onde $\bar{B}$ designa o fecho do conjunto B.

6. Considere o seguinte problema para a equação das ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = 0, \ \ u_t(0,x) = f(x) & x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

onde $f(x)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ definida em $\mathbb{R}^+$.

a) Utilizando a mudança de variáveis $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ definida por $\xi = x+t$, $\eta = x-t$, e sendo $v(\xi,\eta) = v(\xi(t,x),\eta(t,x)) \overset{\text{def}}{=} u(t,x)$, prove que a equação das ondas $u_{tt} = u_{xx}$ é transformada em $v_{\xi\eta} = 0$.

b) Prove que a solução geral da equação transformada tem a forma

$$v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

onde F e G são funções arbitrárias.

c) Utilize as condições iniciais e de fronteira do problema (4) para obter as expressões de F e G em termos dos dados do problema.

d) Determine a solução de (4).