

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 13

1. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leq 0. \end{cases}$$

2. Calcule uma série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2H(x) - 1$, onde H é a função de Heaviside.
3. Considere a função $f(x) = x$ no intervalo $[0, 1]$. Para esta função, investigando a convergência pontual das séries em causa, obtenha uma
- série de Fourier de senos,
 - série de Fourier de cosenos,
 - série de Fourier de senos e cosenos.
4. Determine a série de Fourier da função $g(x) = x^2$ no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Considere um fio metálico isolado, de comprimento 4. A temperatura, no instante $t > 0$, de um ponto do fio com coordenada x é representada por uma função $u(t, x) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}_x^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_t^1(\Omega)$, onde $\Omega = \mathbb{R}^+ \times]0, 4[$ e $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, e que satisfaz o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{D}u_{xx}, & (t, x) \in \Omega \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 4) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 4, \end{cases} \quad (1)$$

onde $\mathcal{D} > 0$ é uma constante e $\varphi(x) \in \mathcal{C}^0([0, 4])$ é a distribuição inicial da temperatura no fio.

- Determine a solução formal geral de (1).
 - Determine a solução formal de (1) quando $\varphi(x) = 4 - x$.
 - Investigue se a solução formal da alínea anterior é, ou não, uma solução clássica.
7. A posição de equilíbrio de uma membrana que cobre um domínio limitado Ω é descrita por uma função $u = u(x, y) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ que é a solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ em Ω e que satisfaz condições apropriadas em $\partial\Omega$.

Seja $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ e considere a seguinte condição na fronteira $\partial\Omega$

$$u|_{\partial\Omega}(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{se } y = 0, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) = f(1) = 0$.

- a) Determine uma expressão formal para $u(x, y)$.
- b) Mostre que se $f \in \mathcal{C}^4([0, 1])$, então a solução formal é uma solução clássica (i.e., no sentido indicado acima) da equação de Laplace.
(Sugestão: Mostre que sendo f de classe $\mathcal{C}^k([0, 1])$ então os coeficientes de Fourier de f convergem para 0 pelo menos como $1/n^k$.)
(Observação: De facto, recorrendo a outros métodos não estudados nesta disciplina, este resultado pode ser substancialmente melhorado: basta que $u|_{\partial\Omega}$ seja contínua para que a solução formal seja uma solução clássica.)

8. a) Utilize o método de separação de variáveis para obter a solução formal geral da equação das ondas unidimensionais amortecidas

$$u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{em } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times]0, 1[,$$

com condições de Dirichlet homogéneas na fronteira.

- b) Determine a solução formal do problema da alínea anterior que satisfaz a condição inicial $u(0, x) = 0$ e $u_t(0, x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$ no intervalo $[0, 1]$.
- c) O que pode concluir quanto à continuidade em $\mathbb{R}_0^+ \times [0, 1]$ da solução formal obtida em b) ? E quanto à sua diferenciabilidade?