Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste

(LEIC, LEEC, LEM)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 29/04/2006, 9h00
Duração: 1h30.

1) Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, e considere $u_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u_\alpha(x, y) = x^2 - y^2 - \alpha(x)y.$$

   a) Determine a forma geral da função α por forma que u_α seja uma função harmónica.

   b) Determine uma função harmónica conjugada de $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3xy$.

2) Calcule os integrais (considerando as curvas percorridas no sentido positivo):

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z - i}\, dz, \qquad \oint_{|z-i|=1} \frac{2z}{(z-3)(z-i)^2}\, dz$$

3) a) Obtenha o desenvolvimento em séries de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)},$$

   em torno dos pontos $z = 0$ e $z = 1$, indicando as respectivas regiões de convergência.

   b) Aproveite o resultado da alínea anterior para calcular:

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)(z-3)}\, dz,$$

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{g(z)}{(z-1)(z-3)}\, dz,$$

   onde g é uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \frac{1}{2}\}$, e tal que $g(1) = 1$.

4) Utilize o Teorema dos resíduos para calcular:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+2}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx.$$

5) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + y\left(\frac{t}{t^2+1}\right) = \operatorname{sen} t \cos t,$$

indicando o intervalo máximo de existência da solução.