Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

1º Semestre 2004/2005

1º Teste

(LCI, LEAE, LEBm, LEFT, LMAC)

2 de Novembro de 2004

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(3 val.) **1.** Esboce geometricamente, tão precisamente quanto possível, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \left\{z \in \mathbb{C} : z^4 = -1\right\} \\ \Omega_2 &= \{z \in \mathbb{C} : z = e^w, \text{com } \mathrm{Re}(w) \in [\log(0,9), 0], \ \mathrm{Im}(w) \in [0, \pi]\}\end{aligned}$$

(5 val.) **2.** Considere as funções complexas $\psi(z) = i(\bar{z})^2$ e $\varphi(z) = z^2$.

(i) Estude ψ e φ quanto à sua diferenciabilidade.

(ii) Aproveite o resultado da alínea anterior para esclarecer se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa: *"Se v é harmónica conjugada de u, então u é harmónica conjugada de v."*
(*Observação: relembre que $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é harmónica conjugada de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ se ambas são harmónicas e se $f + ig$ é holomorfa.*)

(5 val.) **3.** Determine *todas* as séries de potências centradas em $z_0 = 0$ da função complexa definida por $g(z) = \frac{\cos z}{1-z^2}$ e esclareça *cuidadosamente* quais as respectivas regiões de convergência.

(7 val.) **4.** Considere a função definida pela expressão $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$.

(i) Determine e classifique todas as singularidades de f.

(ii) Calcule o valor de $\oint_\gamma f(z)dz$ onde γ é a fronteira da região $\{z \in \mathbb{C} : |z| \in]0, R[, \arg(z) \in]0, \pi[\}$, percorrida uma vez em sentido directo e R é uma constante maior que 1.

(iii) Mostre que $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1}$, onde $\Gamma \subset \gamma$ é a semicircunferência.

(iv) Seja $F = f|_{\mathbb{R}}$. Utilizando os resultados das alíneas anteriores, calcule $\int_{\mathbb{R}} F(x)dx$.

Resolução:

1. Os elementos do conjunto Ω_1 são os complexos cuja potência quarta é -1, ou seja, são as raízes quartas de -1. Como $-1 = 1e^{i\pi}$ conclui-se, pela fórmula de De Moivre, que os elementos de Ω_1 são

$$z_0 = e^{i\pi/4}, \quad z_1 = e^{i3\pi/4}, \quad z_2 = e^{i5\pi/4}, \quad z_3 = e^{i7\pi/4}$$

e portanto o esboço geométrico pedido é o apresentado na figura seguinte:

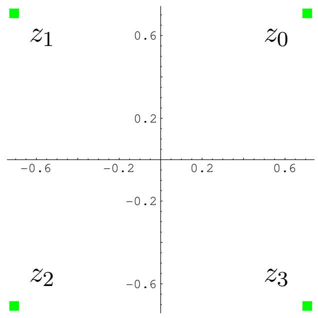

Figura 1: O conjunto Ω_1

Para esboçar o conjunto Ω_2 convém começar por observar que os seus elementos, z, são a imagem, pela função exponencial, de pontos w, no rectangulo seguinte

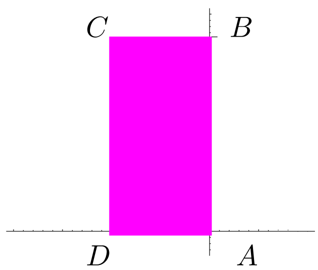

Figura 2: O rectangulo dos w

Os lados deste rectangulo podem ser parametrizados do seguinte modo, onde em todos os casos tem-se $t \in [0,1]$:

$$\begin{array}{ll}
\overline{AB}: & w_1(t) = tB + (1-t)A = t(0+i\pi) + (1-t)(0+i0) = t\pi i, \\
\overline{BC}: & w_2(t) = tC + (1-t)B = t(\log(0,9)+i\pi) + (1-t)(0+i\pi) = t\log(0,9) + i\pi, \\
\overline{CD}: & w_3(t) = tD + (1-t)C = t(\log(0,9)+i0) + (1-t)(\log(0,9)+i\pi) = \log(0,9) + (1-t)\pi i, \\
\overline{DA}: & w_4(t) = tA + (1-t)D = t(0+i0) + (1-t)(\log(0,9)+i0) = (1-t)\log(0,9).
\end{array}$$

Atendendo a que, sendo $w = x + iz$, se tem $z = e^w = e^x(\cos y + i\text{sen}\, y)$ tem-se o seguinte, sempre com $t \in [0,1]$:

$$\begin{array}{rcl}
e^{w_1(t)} & = & \cos(t\pi) + i\text{sen}\,(t\pi), \\
e^{w_2(t)} & = & (0,9)^t\cos(\pi) = -(0,9)^t \\
e^{w_3(t)} & = & 0,9(\cos((1-t)\pi) + i\text{sen}\,((1-t)\pi)) \\
e^{w_4(t)} & = & (0,9)^{1-t}
\end{array}$$

É imediato observar que o primeiro e o terceiro casos são parametrizações de semi-circunferencias centradas na origem e de raios 1 e $0,9$ respectivamente. A primeira percorrida em sentido directo e a outra em sentido inverso. Os segundo e quarto casos são parametrizações de segmentos de recta no eixo real: o segundo entre os pontos -1 e -0.9 e a outra entre 0.9 e 1.

Como um ponto arbitrário interior ao rectangulo dos w (por exemplo $\frac{1}{2}\log(0,9) + i\frac{\pi}{2}$) é transformado num ponto no interior da região limitada pelos arcos de circunferencia e segmentos de recta que acabámos de referir (no exemplo escolhido: $\sqrt{0,9}i$ e observe-se que $0,9 < \sqrt{0,9} < 1$.) podemos concluir que o conjunto Ω_2 é o esboçado na figura seguinte:

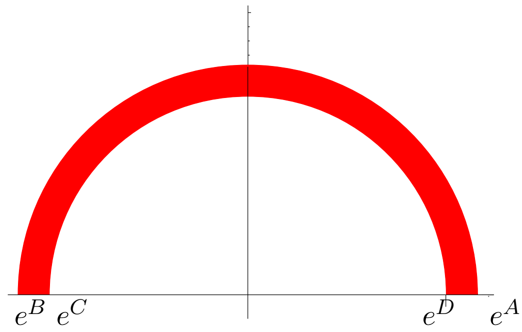

Figura 3: O conjunto Ω_2

2. (i) A função φ é holomorfa em todo o plano complexo $\mathbb{C}$ atendendo a que é um o producto de $z \mapsto z$ por ela própria e esta função é holomorfa (porque é linear.) Quando à função ψ : considerando $z = x + iy$ tem-se $\psi(z) = i(x - iy)^2 = i(x^2 - y^2 - 2xyi) = (2xy) + i(x^2 - y^2)$. Como a função $(2xy, x^2 - y^2)$ é diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$ (porque as suas componentes são polinómios), conclui-se, pelo Teorema de Cauchy-Riemann, que a ψ será diferenciável se e só se as equações de Cauchy-Riemann forem satisfeitas. Mas como

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \neq -2y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2)$$

a menos que $y = 0$ e

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x \neq -2x = -\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2)$$

a menos que $x = 0$, concluimos que o único ponto de $\mathbb{C}$ onde ψ é diferenciável é $0 + i0$ e portanto ψ não é holomorfa em ponto nenhum.

(ii) Observando que $\varphi(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$ e atendendo à diferenciabilidade desta função vista na alínea anterior, tem-se que $2xy$ e $x^2 - y^2$ são funções harmónicas. Ainda pelos resultados da alínea anterior conclui-se que $2xy$ é harmónica conjugada de

$x^2 - y^2$ (porque φ é holomorfa) mas $x^2 - y^2$ não é harmónica conjugada de $2xy$ (porque ψ não é holomorfa.) Consequentemente, a afirmação do enunciado é falsa.

3. A função g tem singularidades nos zeros do polinómio $1 - z^2$, isto é, em $z_+ = 1$ e $z_- = -1$. Como o polinómio é de segundo grau, cada um destes dois zeros terão de ser zeros simples. Sendo $\cos z_- = \cos z_+ = \cos 1 \neq 0$, conclui-se que $z_\pm$ são pólos simples de g, e são as únicas singularidades dasta função. Consequentemente, recorrendo aos Teoremas de Taylor e de Laurent, podemos concluir que g tem duas séries de potências centradas em $z_0 = 0$: uma série de Taylor, convergente em $D(0,1)$ e uma série de Laurent convergente em $D(0;1,\infty)$. Para obter estas séries recorremos ao conhecimento do desenvolvimento do coseno em série de Taylor e à expressão da soma de uma série geométrica. Vejamos: sabe-se que

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

e

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^2\right)^n, \qquad |z^2| < 1.$$

Consequentemente tem-se, em $D(0,1)$, o seguinte:

$$\begin{aligned} g(z) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} z^{2(n-k)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\right) z^{2n} \end{aligned}$$

e em $D(0;1,\infty)$ tem-se

$$\begin{aligned} g(z) &= (\cos z)\frac{1}{1-z^2} = (\cos z)\frac{-1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} \\ &= -z^{-2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\right) \\ &= -z^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} z^{-2(n-k)} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{4k-2n-2}\right) \end{aligned}$$

4. (i) Atendendo a que f é uma função racional (i.e., é a razão de duas funções polinomiais) é holomorfa excepto nos zeros do denominador os quais serão singularidades isoladas (porque um polinómio tem um número finito de zeros...) Os zeros do denominador são as raízes quartas d e -1, as quais já foram calculadas na resposta à pergunta 1, e são

$$z_0 = e^{i\pi/4}, \quad z_1 = e^{i3\pi/4}, \quad z_2 = e^{i5\pi/4}, \quad z_3 = e^{i7\pi/4}$$

. É claro que, sendo os quatro zeros distintos e sendo o polinómio $z^4 + 1$ de grau 4, os zeros serão todos simples e como a função no numerador de f é constante e,em particular, não terá zeros em nenhum dos z_k, concluimos que as únicas singularidades de f são os pontos z_k e são pólos de ordem 1.

(ii) Observando que, para qualquer $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, tem-se $|z_k| = 1 < R$ e ainda que $\arg(z_0), \arg(z_1) \in]0, \pi[$ mas $\arg(z_2), \arg(z_3) \notin]0, \pi[$, conclui-se que $I(\gamma, z_2) = I(\gamma, z_3) = 0$. Além disto, como γ é percorrida uma vez em sentido directo, tem-se $I(\gamma, z_0) = I(\gamma, z_1) = 1$. Por outro lado, atendendo a que já se concluiu que as singularidades são pólos simples, tem-se

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{1}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} \\ &= \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{1}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} \\ &= \frac{1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}.\end{aligned}$$

Escrevendo os z_k na forma cartesiana tem-se

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ou seja,

$$z_1 - z_0 = -\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i\pi}, \quad z_1 - z_2 = i\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i\pi/2}, \quad z_1 - z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2e^{i3\pi/4}$$

$$z_0 - z_1 = \sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i0}, \quad z_0 - z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2e^{i\pi/4}, \quad z_0 - z_3 = i\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i\pi/2},$$

e portanto

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - i\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad \operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} - i\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Pelo Teorema dos Resíduos pode-se então concluir que

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, z_0) \cdot 1 + \operatorname{Res}(f, z_1) \cdot 1) = 2\pi i \frac{-i}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(iii) Atendendo aos resultados básicos sobre integrais de linha e relembrando a desigualdade triangular escrita como $|a + b| \geq |a| - |b|$, tem-se

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq \int_\Gamma \left| \frac{1}{z^4 + 1} \right| |dz| \leq \int_\Gamma \frac{1}{R^4 - 1} |dz| = \frac{1}{R^4 - 1} \int_\Gamma |dz| = \frac{\pi R}{R^4 - 1}$$

onde na última igualdade foi usado o facto do integral $\int_\Gamma |dz|$ ser, por definição, o comprimento da semicircunferência Γ, ou seja πR.

(iv) Como a função F é integrável em $\mathbb{R}$ podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} F(x)dx.$$

Atendendo a que a curva γ pode ser encarada como a concatenação das curvas Γ e $[-R, R]$, pode-se escrever, atendendo ao resultado da alínea (ii),

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} F(x)dx &= \oint_{\gamma} f(z)dz - \int_{\Gamma} f(z)dz \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \int_{\Gamma} f(z)dz.\end{aligned}$$

Usando a alínea anterior, o integral sobre Γ converge para 0 quando $R \to +\infty$ e aplicando este limite à igualdade anterior tem-se

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$