

Análise Matemática IV

1º Semestre 2004/2005

2º Teste, 1º Exame

(LCI, LEAE, LEBm, LEEC, LEFT, LMAC)

7 de Janeiro de 2005

Duração do Teste: 1h30m

Duração do Exame: 3h00m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2,5 val.) 1. Esboce geometricamente, tão precisamente quanto possível, os seguintes subconjuntos de \mathbb{C}

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : z^5 = 1 + i\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = \overline{iw}, \text{ com } \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) \leq 1, \operatorname{Re}(w) \geq 0, \operatorname{Im}(w) \geq 0\}$$

(2,5 val.) 2. (i) Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x + yi) = x^2 + y^2 - 2xyi$. Determine o maior subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ no qual f é diferenciável. Repita o exercício substituindo *diferenciável* por *holomorfa*.

(ii) Seja $v(x, y) = 2xy$. Mostre que v é uma função harmónica e calcule uma função $u(x, y)$ tal que $h(x, y) = u(x, y) + v(x, y)i$ é holomorfa em todo o plano complexo.

(2,5 val.) 3. Considere a função complexa definida pela expressão $g(z) = \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-\pi}\right) \operatorname{sen} z$. Determine todas as singularidades de g . Determine a(s) série(s) de Laurent de g centrada(s) em $z_0 = 0$ e esclareça *cuidadosamente* qual(ais) a(s) sua(s) região(ões) de convergência.

(2,5 val.) 4. Seja t um parâmetro real fixo, e considere a função complexa $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pela expressão $\varphi(z) = \frac{e^{zt}}{(z-1)^2}$.

(i) Determine e classifique a(s) singularidade(s) de φ . Calcule o(s) resíduo(s) de φ na(s) singularidade(s) que determinou.

(ii) Calcule o valor de $\int_{\gamma} \varphi$ onde γ é a fronteira da região $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < R \wedge \operatorname{Re}(z) < 2\}$ percorrida uma vez em sentido directo e R é uma constante maior do que 1.

(iii) Utilizando cuidadosamente o Teorema dos Resíduos, calcule uma expressão para a função real de variável real, Φ , definida em \mathbb{R} por

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{e^{zt}}{(z-1)^2} dz,$$

onde r é a recta $\{z = 2 + si : s \in \mathbb{R}\}$. Explique *detalhadamente* o seu raciocínio.

(2,5 val.) 5. Determine a solução geral (real) do seguinte sistema de EDOs lineares

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

e esboce o respectivo retrato de fases.

(2,0 val.) 6. Considere a equação diferencial linear

$$\psi''' - 5\psi'' + 8\psi' - 4\psi = e^t \quad (1)$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea

(ii) Determine a solução de (1) que satisfaz $\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 1$.

(3,0 val.) 7. Considere a equação diferencial

$$y^2(\log x - 1) + x^2(\log y - 1) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

(i) Mostre que (2) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$ e determine-o.

(ii) Mostre que a solução de (2) que satisfaz a condição inicial $y(e^2) = e^2$ é dada implicitamente por $\frac{\log x}{x} + \frac{\log y}{y} = \frac{4}{e^2}$.

(iii) A partir da expressão anterior conclua que o intervalo máximo de existência da solução é do tipo $] \alpha, \beta [$ com $0 < \alpha < e < e^2 < \beta < +\infty$.

(Sugestão: comece por estudar a função $u \mapsto \frac{\log u}{u}$.)

(iv) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico da solução de (2) estudada nas duas alíneas anteriores, no ponto (e^2, e^2) .

(2,5 val.) 8. Considere um fio metálico termicamente isolado, de comprimento 1. A temperatura, no instante $t \geq 0$ de um ponto do fio com coordenada x é representada pela função $u(t, x) \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_t^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_x^2(\Omega)$, onde $\Omega = \mathbb{R}^+ \times]0, 1[$ e $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, a qual satisfaz o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{D}u_{xx}, & (t, x) \in \Omega \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\mathcal{D} > 0$ é uma constante e $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ é a distribuição inicial da temperatura no fio.

(i) Determine a solução formal geral do problema de valores na fronteira em (3)

(ii) Determine a solução formal de (3) quando $\varphi(x) = \text{sen}(\pi x)$ em $[0, 1]$.

(iii) Investigue se a solução formal da alínea anterior é, ou não, uma solução clássica, i.e., com a regularidade indicada no enunciado acima.

Resolução:

1. Os elementos do conjunto Ω_1 são os complexos cuja potência quinta é $1 + i$, ou seja, são as raízes quintas de $1 + i$. Como $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ conclui-se, pela fórmula de De Moivre, que os elementos de Ω_1 são

$$z_0 = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{\pi}{20}}, \quad z_1 = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{9\pi}{20}}, \quad z_2 = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{17\pi}{20}}, \quad z_3 = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{25\pi}{20}}, \quad z_4 = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{33\pi}{20}}$$

e portanto o esboço geométrico pedido é o apresentado na figura seguinte:

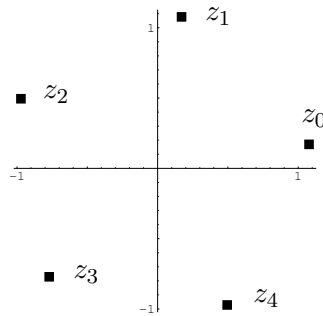


Figura 1: O conjunto Ω_1

Para esboçar o conjunto Ω_2 convém começar por observar que os seus elementos, z , são a imagem, pela função $w \mapsto i\bar{w}$ de pontos w no triângulo seguinte

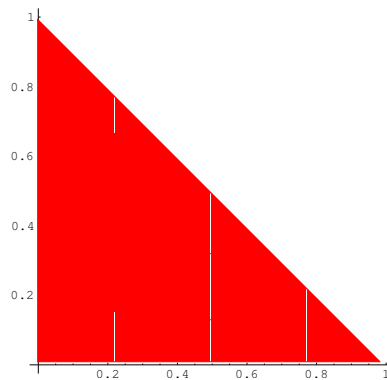


Figura 2: O triângulo dos w

Como o produto de w por $i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$ corresponde a rodar o afixo de w de $\frac{\pi}{2}$ no sentido directo e a aplicação do conjugado a um número complexo corresponde geometricamente à reflexão do seu afixo no eixo real, conclui-se que o conjunto Ω_2 é o representado a verde na Figura 3:

2. (i) Sejam $f_1(x, y) = \text{Re}(f(x + yi)) = x^2 + y^2$ e $f_2(x, y) = \text{Im}(f(x + yi)) = -2xy$. Como f_1 e f_2 são funções polinomiais, a função $(f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável em todo o \mathbb{R}^2 . Consequentemente, pelo Teorema de Cauchy-Riemann, a função complexa f será diferenciável (no sentido complexo) em todos os pontos onde as equações de Cauchy-

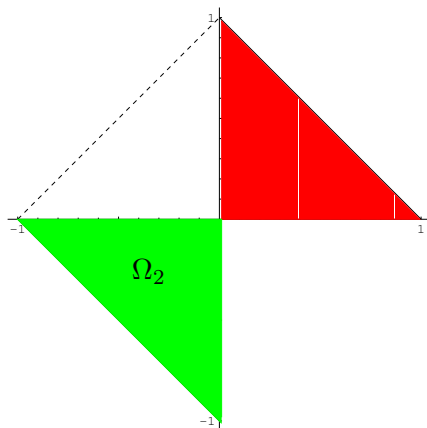


Figura 3: O conjunto Ω_2 , a verde

Riemann forem satisfeitas, isto é, nos pontos $x + yi$ nos quais

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2x \\ 2y &= \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y \end{aligned}$$

ou seja, em $0+0i$. Conclui-se então que $\Omega = \{z : \operatorname{Re}(z) = 0\}$. Se, em vez de diferenciável, estivermos interessados em estudar onde f é holomorfa, há que lembrar que uma função complexa é holomorfa num ponto se e só se existir uma vizinhança desse ponto tal que f seja aí diferenciável. Os dois conceitos são, pois, equivalentes em conjuntos abertos, mas no presente caso, f só é diferenciável em $\{\operatorname{Re}(z) = 0\}$, o qual é um conjunto com interior vazio, pelo que f não será holomorfa em ponto nenhum de \mathbb{C} , ou seja $\Omega = \emptyset$.

- (ii) A função v é polinomial e portanto é de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 . Tem-se $\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$ e portanto v é harmónica em \mathbb{R}^2 . Deste resultado, identificando \mathbb{R}^2 com o plano complexo \mathbb{C} , e atendendo a que o plano é um domínio simplesmente conexo, podemos concluir que existe uma função complexa h , inteira (i.e., holomorfa em todo o \mathbb{C}), tal que v é a parte imaginária de h . Seja $u = \operatorname{Re}(h)$. Pelas equações de Cauchy-Riemann tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y. \end{aligned}$$

Integrando (em ordem a x) a primeira equação de Cauchy-Riemann tem-se $u(x, y) = x^2 + U(y)$. Derivando esta expressão e comparando com a segunda equação de Cauchy-Riemann vem $U'(y) = -2y$ e integrando (em ordem a y) resulta em $U(y) = -y^2 + C$, onde C é uma constante real arbitrária. Conclui-se, então, que uma possível função u é $u(x, y) = x^2 - y^2$, a qual é obtida tomando $C = 0$.

3. A função $\operatorname{sen} z$ é inteira e portanto as singularidades de g estão localizadas nos pontos que são singularidades de $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-\pi}$, i.e., em $z = 0$ e em $z = \pi$. Atendendo a que $\frac{\operatorname{sen} w}{w} \rightarrow 1$ quando $w \rightarrow 0$ é imediato concluir a partir da expressão de g e do conhecimento sobre a função seno, que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z - \pi} = -\frac{\operatorname{sen}(z - \pi)}{z - \pi} \xrightarrow{z \rightarrow \pi} -1,$$

pelo que g tem uma singularidade removível em π . Analogamente se conclui que 0 é um pólo simples (de ordem 1) de g .

Para escrevermos a(s) série(s) de Laurent de g centrada(s) em $z_0 = 0$ é conveniente considerarmos separadamente as duas parcelas de g e a expressão da série de McLaurin do seno

$$\text{sen } z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Assim tem-se

$$\frac{\text{sen } z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1}, \quad (4)$$

convergente em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por outro lado, utilizando a expressão da soma de uma série geométrica e efectuando o produto das série presentes, tem-se

$$\frac{\text{sen } z}{z - \pi} = -\frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \pi^{-k} z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+1} \pi^{n-k-1}}{(2n+1)!} z^{k+n+1}, \quad (5)$$

onde a série no membro direito é convergente na intersecção dos domínios de convergência das duas séries, i.e., em $\{|z| < \pi\} \cap \mathbb{C} = D(0, \pi)$.

Por outro lado tem-se também

$$\frac{\text{sen } z}{z - \pi} = \frac{1}{1 - \frac{\pi}{z}} \frac{\text{sen } z}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n \pi^{k-n}}{(2n+1)!} z^{3n-k}, \quad (6)$$

com a série do membro direito convergente em $\{|z| > \pi\} \cap \mathbb{C} = D(0; \pi, \infty)$.

Conclui-se assim que há duas séries de Laurent nas condições do enunciado: uma absolutamente convergente em $D(0; 0, \pi)$ obtida pela adição termo-a-termo das séries (4) e (5); outra absolutamente convergente em $D(0; \pi, \infty)$, obtida pelo mesmo processo com as séries (4) e (6).

4. (i) Atendendo a que $z \mapsto e^{zt}$ é uma função inteira e sem zeros, e a que 1 é um zero de ordem 2 de $z \mapsto (z-1)^2$ conclui-se que a única singularidade de φ é $z = 1$, e trata-se de um pólo de ordem 2. O resíduo de φ nesse ponto é

$$\text{Res}(\varphi, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)!} \left((z-1)^2 \varphi(z) \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} z t e^{zt} = t e^t$$

- (ii) Observando que γ é uma curva sessionalmente regular e que a singularidade $z = 1$ está no interior da região limitada por γ , podemos aplicar o Teorema dos Resíduos e, atendendo à alínea anterior e à informação de que γ é percorrida uma vez em sentido directo, concluímos que

$$\int_{\gamma} \varphi(z) dz = 2\pi i \text{Res}(\varphi, 1) I(\gamma, 1) = 2\pi i t e^t$$

- (iii) Começemos por considerar o integral sobre a recta r como o limite dos integrais sobre segmentos de recta $r_{\tilde{R}} = \{z = 2 + si : s \in [-\tilde{R}, \tilde{R}]\}$ quando $\tilde{R} \rightarrow +\infty$, e por observar

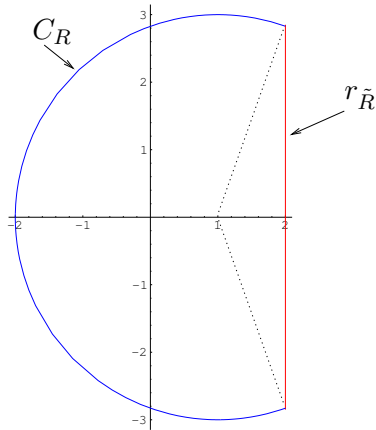


Figura 4: O segmento $r_{\tilde{R}}$ (a vermelho) e a curva γ . A azul é representada a curva $C_R = \gamma \setminus r_{\tilde{R}}$.

o segmento $r_{\tilde{R}}$ é um subconjunto da curva γ da alínea anterior desde que $R^2 = 1 + \tilde{R}^2$ (ver Figura 4)

Consequentemente, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_r \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tilde{R} \rightarrow \infty} \int_{r_{\tilde{R}}} \varphi(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tilde{R} \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma} \varphi(z) dz - \int_{C_R} \varphi(z) dz \right) \\ &= te^t - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tilde{R} \rightarrow \infty} \int_{C_R} \varphi(z) dz.\end{aligned}$$

Para calcular o limite no membro direito parametrize-se C_R por $z = 1 + Re^{i\theta}$, com $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$, onde $\theta_{min} = \arccos(1/R)$ e $\theta_{max} = 2\pi - \arccos(1/R)$ (consulte a Figura 4!). Substituindo esta parametrização no integral tem-se

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_R} \varphi(z) dz \right| &\leq Re^t \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{|e^{tRe^{i\theta}}|}{R^2} d\theta \\ &\leq \frac{e^t}{R} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR\cos\theta} d\theta,\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usámos o facto de $\theta_{min} \uparrow \frac{\pi}{2}$ e $\theta_{max} \downarrow \frac{3\pi}{2}$ quando R (e portanto também quando $\tilde{R} = \sqrt{R^2 - 1}$) tende para $+\infty$. Observando que $\cos\theta = -\cos(\theta - \pi)$ pode-se escrever, mudando de variável $\theta \mapsto \tilde{\theta} = \theta - \pi$,

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-tR\cos\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-tR\cos\tilde{\theta}} d\tilde{\theta}$$

e a última igualdade é devida ao facto do coseno ser uma função par. Como facilmente se conclui por observação da Figura 5, na região de integração é válida a desigualdade $\cos\tilde{\theta} \geq 1 - \frac{2}{\pi}\tilde{\theta}$ e portanto

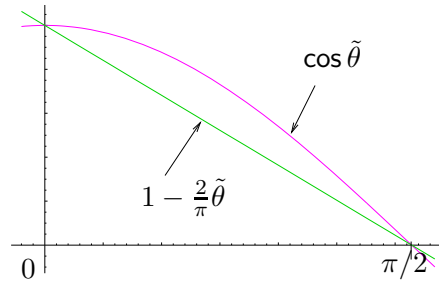


Figura 5: Os gráficos de $\cos \tilde{\theta}$ e de $1 - \frac{2}{\pi} \tilde{\theta}$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$2 \int_0^{\pi/2} e^{-tR \cos \tilde{\theta}} d\tilde{\theta} \leq 2e^{-tR} \int_0^{\pi/2} e^{\frac{2}{\pi} tR \tilde{\theta}} d\tilde{\theta} = \frac{\pi}{tR} (1 - e^{-tR})$$

e, como o membro direito converge para 0 quando $R \rightarrow +\infty$, isto mostra que o integral sobre C_R tende para zero e que portanto

$$\Phi(t) = te^t.$$

5. Definindo o vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ o sistema de equações diferenciais pode ser escrito como $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, onde a matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A solução geral real pode ser escrita na forma

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{\alpha}$$

onde $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ é um vector arbitrário. As matrizes fundamentais $\Phi(t)$ podem ser calculadas de diferentes maneiras, por exemplo $\Phi(t) = e^{At}$ onde a determinação da matriz pode ser feita recorrendo à transformação de A numa forma canónica de Jordan, como se segue:

Os valores próprios de A são os zeros do seus polinómio característico:

$$0 = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 + 1$$

e portanto $(2 - \lambda)^2 = -1 \Leftrightarrow 2 - \lambda = \pm i \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i$. Como os valores próprios de A são todos distintos, a matriz é diagonalizável, i.e., utilizando para matriz de mudança de base de \mathbb{R}^2 a matriz

$$M = \left[\mathbf{v}_{2+i} \mid \mathbf{v}_{2-i} \right]$$

onde \mathbf{v}_λ é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ , pode-se escrever

$$A = M \begin{bmatrix} 2 + i & 0 \\ 0 & 2 - i \end{bmatrix} M^{-1} = M \text{diag}(2 + i, 2 - i) M^{-1}$$

e, por um resultado conhecido sobre exponenciais de matrizes, pode-se escrever

$$e^{At} = M e^{t \text{diag}(2+i, 2-i)} M^{-1} = e^{2t} M \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} M^{-1} \quad (7)$$

Calculando os vectores próprios da matriz A tem-se $\mathbf{v}_{1+i} = (1, i)^T$ e $\mathbf{v}_{1-i} = (1, -i)^T$ pelo que vem

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Substituindo em (7) tem-se

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{2} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} e^{2t} \begin{bmatrix} e^{it} + e^{-it} & -i(e^{it} - e^{-it}) \\ i(e^{it} - e^{-it}) & e^{it} + e^{-it} \end{bmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde na última igualdade usou-se a fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i \text{sen } t$ para obter $e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t$ e $e^{it} - e^{-it} = 2i \text{sen } t$. A solução geral pretendida é, então, a seguinte

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

com $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ arbitrários.

Para o esboço do retrato de fase utilizamos o conhecimento já adquirido sobre os valores e os vectores próprios da matriz A : como os valores próprios são os dois diferentes de zero sabemos que o núcleo da matriz é constituído apenas pela origem e portanto $\{0\}$ é o único ponto de equilíbrio (i.e., a única solução constante) do sistema; por outro lado, como a parte real dos valores próprios é $2 > 0$ sabemos que as soluções são ilimitadas quando $t \rightarrow +\infty$ (a origem, e, como o sistema é autónomo, também todas as outras soluções são instáveis.) Como os valores próprios não são reais as órbitas vão ser espirais (correspondentes aos termos periódicos na expressão das soluções.) Para determinar a orientação das espirais recorreremos às informações geométricas contidas nos vectores próprios

$$\mathbf{v}_{2+i} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_{\text{Re}} + i \mathbf{v}_{\text{Im}},$$

e também no próprio sistema de EDOs: o vector tangente à órbita num determinado ponto de \mathbb{R}^2 é dado substituindo o ponto no membro direito do sistema e calculando o resultado, por exemplo, o vector tangente á órbita do sistema no ponto $(0, 1)^T$ é

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

o que nos permite esboçar a órbita apresentada na Figura 6

Reunindo a representação de diversas órbitas do sistema numa mesma representação gráfica tem-se o seguinte esboço do retrato de fases pretendido (Figura 7.)

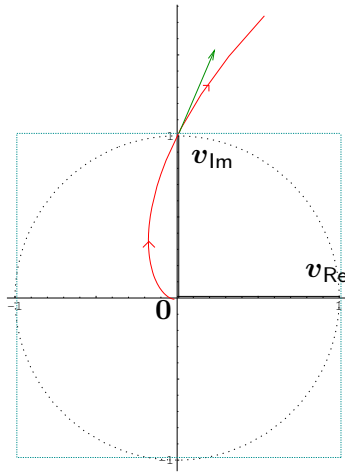


Figura 6: Órbita da solução do sistema que passa por $(0, 1)^T$ (a vermelho) e vector tangente a essa órbita nesse mesmo ponto (a verde). Estão também representados os vectores que são a parte real, v_{Re} , e imaginária, v_{Im} , do vector próprio v_{2+i} .

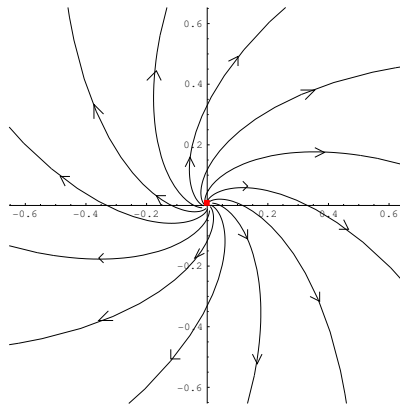


Figura 7: Esboço do retrato de fases do sistema. O ponto de equilíbrio (instável) está a vermelho.

6. (i) O polinómio característico da equação é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$. Um zero de p é $\lambda = 1$, pelo que factorizando tem-se $p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda - 1) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$. Portanto, um base para o espaço das soluções da equação homogénea é constituída pelas funções e^{2t} , te^{2t} e e^t , pelo que solução geral pedida é

$$\psi(t) = a_1e^{2t} + a_2te^{2t} + a_3e^t,$$

com a_1, a_2, a_3 constantes reais arbitrárias.

- (ii) Um polinómio aniquilador para e^t é $D - 1$. Aplicando este polinómio diferencial a ambos os membros de (1) e atendendo à factorização do polinómio característico apresentada na alínea anterior tem-se $(D - 1)^2(D - 2)^2\psi = 0$, cuja solução geral é

$$\psi(t) = a_1e^{2t} + a_2te^{2t} + a_3e^t + a_4te^t.$$

Comparando com a solução geral da equação homogénea obtida anteriormente, conclui-se que uma solução particular da equação não-homogénea será do tipo $\psi_p(t) = a_4 t e^t$ para algum a_4 real convenientemente escolhido. Tem-se $\psi'_p(t) = a_4 e^t(1+t)$, $\psi''_p(t) = a_4 e^t(2+t)$ e $\psi'''_p(t) = a_4 e^t(3+t)$, pelo que, substituindo na equação diferencial (1) e simplificando,

$$(1 - 5 + 8 - 4)ta_4 + (3 - 10 + 8)a_4 = 1 \iff a_4 = 1,$$

concluindo-se que a solução geral da equação não-homogénea é

$$\psi(t) = a_1 e^{2t} + a_2 t e^{2t} + a_3 e^t + t e^t.$$

Derivando esta expressão tem-se

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= 2a_1 e^{2t} + a_2 e^{2t}(1+2t) + a_3 e^t + (1+t)e^t. \\ \psi''(t) &= 4a_1 e^{2t} + 2a_2 e^{2t}(2+2t) + a_3 e^t + (2+t)e^t.\end{aligned}$$

Utilizando a condição inicial indicada no enunciado seja satisfeita, tem de se verificar

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ 2a_1 + a_2 + a_3 + 1 = 1 \\ 4a_1 + 4a_2 + a_3 + 2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 3 \end{cases}$$

e conclui-se que a solução pretendida é

$$\psi(t) = e^{2t}(t-2) + e^t(t+3).$$

7. (i) Seja $\mu = \mu(xy)$ e multiplique-se a equação (2) por μ obtendo-se

$$y^2(\log x - 1)\mu + x^2(\log y - 1)\mu \frac{dy}{dx} = 0. \quad (8)$$

Para que esta equação seja exacta é necessário que o campo vectorial seja fechado, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial y} (y^2(\log x - 1)\mu) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2(\log y - 1)\mu)$$

ou seja

$$y^2(\log x - 1)x\mu' + 2y(\log x - 1)\mu = x^2(\log y - 1)y\mu' + 2x(\log y - 1)\mu$$

o que, após algumas manipulações algébricas elementares resulta em $\mu' = -\frac{2}{xy}\mu$ o que permite concluir que de facto μ é apenas função do produto xy e, resolvendo a EDO tem-se $\mu = (xy)^{-2}$.

(ii) Substituindo em (8) a expressão encontrada na alínea anterior para o factor integrante¹ obtém-se

$$\frac{\log x - 1}{x^2} + \frac{\log y - 1}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (9)$$

¹Não tendo conseguido resolver a alínea anterior poderia ainda resolver esta alínea do seguinte modo: seja $\phi(x, y) = \frac{\log x}{x} + \frac{\log y}{y}$. É imediato verificar que $\phi(e^2, e^2) = \frac{4}{e^2}$. Por outro lado tem-se $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1 - \log y}{y^2}$ e portanto $\frac{\partial \phi}{\partial y}(e^2, e^2) = -e^{-4} \neq 0$. Pelo Teorema das funções implícitas $\phi(x, y) = \frac{4}{e^2}$ define implicitamente uma única função $y = y(x)$ numa vizinhança suficientemente pequena de (e^2, e^2) . Derivando ambos os membros de $\phi(x, y(x)) = \frac{4}{e^2}$ tem-se $\frac{d\phi}{dx}(x, y(x)) = 0$, ou seja, pelo Teorema da derivação das funções compostas, $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{1 - \log x}{x^2} + \frac{1 - \log y}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0$. Se multiplicarmos esta expressão por $(xy)^2$ obtemos a equação (2) e mostramos assim o resultado pretendido. Obviamente que isto também mostra que o factor integrante pedido na alínea anterior é $\mu = (xy)^{-2}$ pelo que afinal sempre acabámos por conseguir resolver a alínea (i) também...

Para que esta equação seja exacta, ou seja, para que exista um potencial ϕ tal que

$$\nabla\phi = \left(\frac{\log x - 1}{x^2}, \frac{\log y - 1}{y^2} \right) \quad (10)$$

é suficiente que o campo vectorial seja fechado num conjunto simplesmente conexo. O maior conjunto simplesmente conexo que contém o ponto inicial e para o qual o campo está definido é $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e portanto aí garante-se a existência de um potencial ϕ satisfazendo (10). Integrando em ordem a x a primeira igualdade em (10) vem $\phi(x, y) = -\frac{\log x}{x} + h(y)$. Derivando esta expressão em ordem a y e usando a segunda igualdade em (10) vem $h(y) = -\frac{\log y}{y} + C$ e portanto *um* potencial ϕ é obtido fazendo $C = 0$: $\phi(x, y) = -\frac{\log x}{x} - \frac{\log y}{y}$. A equação diferencial é, então, equivalente a $\frac{d\phi}{dx}(x, y(x)) = 0 \Leftrightarrow \phi(x, y(x)) = \text{const}$. Usando a expressão para ϕ já determinada e a condição inicial dada concluímos que $\text{const} = -\frac{4}{e^2}$ e concluímos o pretendido.

- (iii) Considere-se a função $f(u) = \frac{\log u}{u}$ definida em \mathbb{R}^+ . Como a derivada é $F'(u) = \frac{1 - \log u}{u^2}$ conclui-se que F possui um único ponto de estacionaridade, em $u = e$, e que este é um máximo absoluto, valendo a função aí $1/e$. Como $\lim_{u \rightarrow 0} F(u) = -\infty$ e $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = 0$ temos o gráfico de F apresentado na Figura 8.

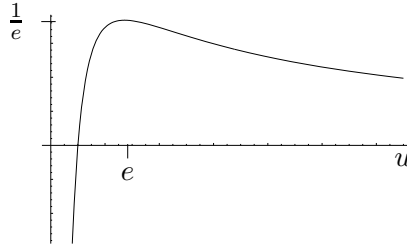


Figura 8: Gráfico da função $F(u) = \frac{\log u}{u}$.

Recorrendo a este comportamento e à expressão implícita para a solução do problema de valores iniciais da alínea anterior, tem-se

$$\frac{1}{e} \geq \frac{\log x}{x} = \frac{4}{e^2} - \frac{\log y}{y} \geq \frac{4}{e^2} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \left(\frac{4}{e} - 1 \right) > 0.$$

Mas atendendo ao gráfico na Figura 9 é imediato concluir que para que $\frac{\log x}{x}$ seja limitado inferiormente por uma constante positiva é necessário e suficiente que se tenha x num conjunto limitado $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$. Então, o intervalo máximo de existência será um intervalo aberto $] \alpha, \beta [\subset [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$. É agora claro que tem de se ter $0 < \alpha < e < \beta < +\infty$. Como a condição inicial do problema em estudo é dada em $x = e^2$ é também claro que se terá $\alpha < e^2 < \beta$, como $e < e^2$ concluem-se assim todas as desigualdades pretendidas no enunciado.

- (iv) A equação da recta tangente pretendida é dada pelo polinómio de Taylor de primeira ordem da solução no ponto em causa, ou seja é $y = y(e^2) + y'(e^2)(x - e^2)$. Como se tem, pela condição inicial $y(e^2) = e^2$ e usando a equação diferencial (2) tem-se $y'(e^2) = -\frac{y^2(e^2)(\log e^2 - 1)}{(e^2)^2(\log y(e^2) - 1)} = -\frac{e^4}{e^4} = -1$, pelo que a equação pedida é $y = 2e^2 - x$.

8. (i) Considerando $u(t, x) = T(t)X(x)$, a equação do calor vem escrita como $T'X = DTX''$. Assumindo que $T(t)X(x) \neq 0$, a equação pode ser escrita como $T'/T = DX''/X$, e

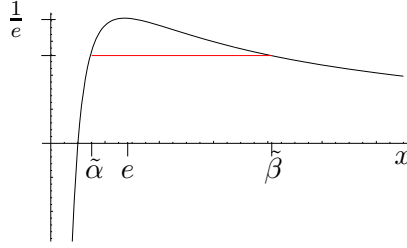


Figura 9: Conclusão sobre o intervalo máximo de existência a partir do estudo do gráfico da função $F(x)$. A vermelho está o minorante de F (ver texto).

portanto existe pelo menos uma constante real σ tal que, para quaisquer $(t, x) \in \Omega$, são válidas as igualdades

$$\frac{1}{\mathcal{D}} \frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x).$$

As condições na fronteira podem ser escritas utilizando a hipótese $u(t, x) = T(t)X(x)$:

$$\begin{aligned} 0 = u_x(t, 0) = T(t)X'(0) &\iff X'(0) = 0 \quad \text{porque, por hipótese, } T(t) \neq 0 \\ 0 = u_x(t, 1) = T(t)X'(1) &\iff X'(1) = 0 \quad \text{pela mesma razão.} \end{aligned}$$

Temos, assim, o seguinte problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X'(0) = 0 = X'(1). \end{cases}$$

Estudemos a possibilidade de obtenção de soluções não identicamente nulas para este problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação fica $X'' = 0$, cujas soluções são $X(x) = ax + b$. Atendendo às condições na fronteira e a que $X'(x) = a$ para qualquer x tem-se $a = 0$ e b arbitrário, pelo que as soluções do problema são as funções constantes $X(x) = b, \forall x$
- Se $\sigma > 0$ a solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se o seguinte sistema para a e b :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{\sigma}} & -e^{-\sqrt{\sigma}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\sqrt{\sigma} \\ b\sqrt{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e como o determinante desta matriz é $-e^{-\sqrt{\sigma}} + e^{\sqrt{\sigma}} \neq 0$ conclui-se que a única solução do sistema é $a = b = 0$ do que resulta a solução trivial $X(x) \equiv 0$.

- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos(\sqrt{|\sigma|x}) + b\sin(\sqrt{|\sigma|x})$. Derivando esta expressão tem-se $X'(x) = -a\sqrt{|\sigma|}\sin(\sqrt{|\sigma|x}) + b\sqrt{|\sigma|}\cos(\sqrt{|\sigma|x})$ e vem, atendendo às condições na fronteira, $0 = X'(0) = b\sqrt{|\sigma|} \Rightarrow b = 0$ e $0 = X'(1) = -a\sqrt{|\sigma|}\sin(\sqrt{|\sigma|}) \Rightarrow \sqrt{|\sigma|} = k\pi, \forall k \in \mathbb{N}_1$. As soluções correspondentes são, então,

$$X_k(x) = \cos(k\pi x), \forall k \in \mathbb{N}_1,$$

e todas as combinações lineares finitas destas funções.

Dos resultados acima resulta que $\sigma = \sigma_k = -k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}_0$. Atendendo a isto a equação para $T(t)$ é

$$T' = -k^2\pi^2\mathcal{D}T, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

cuja solução geral é

$$T_k(t) = a_k e^{-k^2\pi^2\mathcal{D}t}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

onde a_k são constantes reais arbitrárias. Assim, a solução geral formal do problema é

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) e^{-k^2\pi^2\mathcal{D}t}.$$

(ii) Usando a condição inicial e a solução formal geral obtida na alínea anterior tem-se

$$\text{sen}(\pi x) = u(0, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

e portanto os coeficientes a_k serão os coeficientes de Fourier da função periódica de período 2 (porque o maior período das funções usadas no desenvolvimento é 2, obtido para o caso $k = 1$), par (porque a série de Fourier é uma série de cossenos) cuja restrição ao intervalo $[0, 1]$ é $\text{sen}(\pi x)$. Os coeficientes são, então, calculados por

$$a_k = \frac{2}{1} \int_0^1 \text{sen}(\pi x) \cos(k\pi x) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

O caso $k = 0$ é uma simples integração imediata e resulta em $a_0 = \frac{4}{\pi}$. Se $k = 1$ uma integração imediata resulta em $a_1 = 0$. Para os casos com $k \in \mathbb{N}_2$ necessitamos efectuar duas integrações por partes, ao fim das quais se obtém o resultado

$$a_k = -2 \frac{1 + (-1)^k}{(k^2 - 1)\pi}.$$

Note-se que todos os coeficientes com k ímpar são nulos. Com isto podemos finalmente escrever a solução formal pretendida:

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2n\pi x) e^{-4n^2\pi^2\mathcal{D}t} \quad (11)$$

(iii) Seja $u_n(t, x)$ o termo geral da série que fornece a solução formal (11). Então $u_n(t, x)$ é o produto de funções \mathcal{C}^∞ em t e em x e portanto é uma função \mathcal{C}^∞ , e em particular é $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}_t^1(\Omega) \cap \mathcal{C}_x^2(\Omega)$. Resta investigar se a soma de funções com esta regularidade tem, ou não, a mesma regularidade.

Começemos pela continuidade: observando que em $\overline{\Omega}$

$$|u_n(t, x)| \leq \frac{1}{4n^2 - 1}$$

e tendo em conta que a série numérica com termo geral $\frac{1}{4n^2 - 1}$ é absolutamente convergente (por comparação com a série de Dirichlet, convergente, de termo geral n^{-2} .) o

Teste de Weierstrass permite-nos concluir que a série $\sum_n u_n$ é absolutamente e uniformemente convergente em $\overline{\Omega}$ e como a soma de uma série absolutamente convergente de funções contínuas é ainda uma função contínua, concluímos que $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

Vejam agora a diferenciabilidade em ordem a t num ponto $(t, x) \in \Omega$ arbitrário. Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ dado por $\Omega_0 = [t_0, \infty[\times]\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, onde t_0 e ε são reais (fixos) suficientemente pequenos para que o ponto em estudo (t, x) esteja no interior de Ω_0 . Observando que, em Ω_0 , se tem

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq \frac{4n^2 \pi^2 \mathcal{D}}{4n^2 - 1} e^{-4n^2 \pi^2 \mathcal{D} t_0},$$

atendendo a que $\frac{4n^2 \pi^2 \mathcal{D}}{4n^2 - 1} e^{-4n^2 \pi^2 \mathcal{D} t_0} \leq \text{const} \left(\frac{1}{e^{4\pi^2 \mathcal{D} t_0}} \right)^{n^2}$ e lembrando que séries geométricas com razão menor que 1 são convergentes, concluímos (novamente pelo Teste de Weierstrass) que a série $\sum_n \frac{\partial u_n}{\partial t}$ é uniformemente convergente em Ω_0 e, como $\sum_n u_n$ é convergente, concluímos que a soma desta série é uma função continuamente diferenciável em ordem a t no ponto (t, x) e a sua derivada pode ser determinada derivando termo-a-termo a série. Como o ponto (t, x) foi escolhido arbitrariamente concluímos com isto que $u \in \mathcal{C}_t^1(\Omega)$.

Finalmente, para a diferenciabilidade em ordem a x prosseguimos de modo análogo: Em Ω_0 , tem -se

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq \frac{2n\pi}{4n^2 - 1} e^{-4n^2 \pi^2 \mathcal{D} t_0}$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| \leq \frac{4n^2 \pi^2}{4n^2 - 1} e^{-4n^2 \pi^2 \mathcal{D} t_0}$$

pelo que, o Teste de Weierstrass e a aplicação, por duas vezes sucessivas, do mesmo argumento que usámos para o estudo da diferenciabilidade em ordem a t permite-nos agora concluir, primeiro que $u \in \mathcal{C}_x^1(\Omega)$ e depois que $u \in \mathcal{C}_x^2(\Omega)$.

Isto mostra que a solução formal dada por (11) é de facto uma solução clássica do problema.