Análise Matemática IV

2º Exame - 19 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

Resolução

1.

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad (D-2)^2 y = e^{2t} \quad \Rightarrow \quad (D-2)^3 y = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad y = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t} + c_3 t^2 e^{2t}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Substituindo estas funções na equação original obtém-se

$$(2c_3 e^{2t} + 8c_3 te^{2t} + 4c_3 t^2 e^{2t}) - 4(2c_3 te^{2t} + 2c_3 t^2 e^{2t}) + 4(c_3 t^2 e^{2t}) = e^{2t},$$

ou seja, $c_3 = 1/2$. Concluímos que as soluções da equação dada são

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t} + \frac{t^2}{2} e^{2t}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Vamos procurar soluções de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação diferencial, $XT'' = c^2 X'' T$, ou $\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$. Conclui-se que ambos os membros da última igualdade são uma mesma constante, constante essa que designaremos por $-\lambda$. Tem-se $X'' + \lambda X = 0$ e $T'' = -\lambda c^2 T$. Das condições fronteira para u, vem $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ e $u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0$. Uma vez que não queremos $T(t) \equiv 0$ (porque isso conduziria a $u(x,t) \equiv 0$), tiramos $X(0) = X(\pi) = 0$. As soluções não nulas de

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \text{ em }]0,\pi[, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases}$$

podem ser indexadas em $n \in \mathbb{N}_1$:

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\pi^2} = n^2, \\ X_n(x) = c_n \sin(nx), \end{cases}$$

onde os c_n's são constantes. Agora a equação $T'' = -n^2 c^2 T$, conduz a $T(t) = d_n \cos(nct) + e_n \sin(nct)$, onde os d_n's e os e_n's são constantes. Fazendo o produto de X_n por T_n, obtém-se

$$u_n(x,t) = \sin(nx)[a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)],$$

com $a_n = c_n d_n$ e $b_n = c_n e_n$. Cada uma destas funções u_n satisfaz a equação diferencial com as condições fronteiras impostas, logo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)[a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)]$$

é também uma solução formal da equação diferencial com as condições fronteiras impostas. Para satisfazer as condições iniciais vamos impor que

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx)=\sin(x),$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n nc\sin(nx)=\sin(2x),$$

Pelo facto de as funções $x\mapsto \sin(nx)$ serem ortogonais em $L^2(0,\pi)$, tira-se que $a_1=1$, $b_2=1/(2c)$, sendo todos os restantes a_n's e b_n's nulos. Substituindo na expressão para $u(x,t)$,

$$u(x,t)=\sin(x)\cos(ct)+\frac{1}{2c}\sin(2x)\sin(2ct)$$

Verifica-se facilmente que esta é uma solução da equação diferencial com as condições fronteira e iniciais dadas. Foi provado nas aulas que o problema posto tem uma única solução usando o método da energia.

3. Consideremos a extensão par, $\bar{f}$, de f ao intervalo $[-2,2]$. Sabemos que

$$\bar{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right],$$

com

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\bar{f}(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\bar{f}(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx.$$

Sendo a função $\bar{f}$ é par, todos os b_n's são nulos e

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^2 \bar{f}(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=\int_1^2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=\frac{2}{n\pi}\left[\sin(n\pi)-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\\ &= -\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}\frac{2}{n\pi}(-1)^{(n+1)/2} & \text{se } n \text{ é ímpar,}\\ 0 & \text{se } n \text{ é par não nulo.}\end{cases}\end{aligned}$$

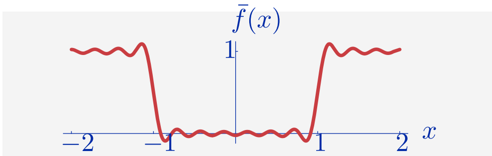
O valor de a_0 é

$$a_0=\int_1^2 1\,dx=1.$$

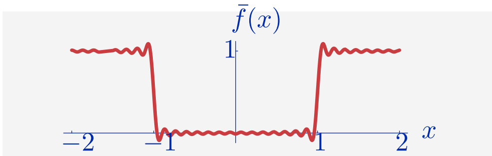
Para $|x|\le 2$ e $x\neq\pm 1$,

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(\pi x/2)}{1}-\frac{\cos(3\pi x/2)}{3}+\frac{\cos(5\pi x/2)}{5}-\dots\right],$$

onde a série do segundo membro converge pontualmente. Para $x = \pm 1$, a soma da série vale $1/2$ enquanto $\bar{f}(\pm 1) = 1$. Restringindo x ao intervalo $[0, 2]$ obtém-se a série de cosenos de f.



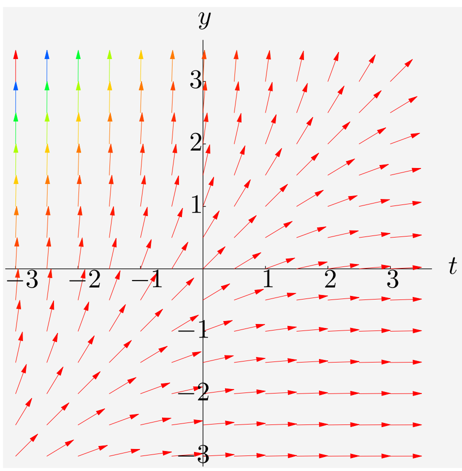
Esboço do gráfico de $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k-1}\frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right]}{2k-1}$.



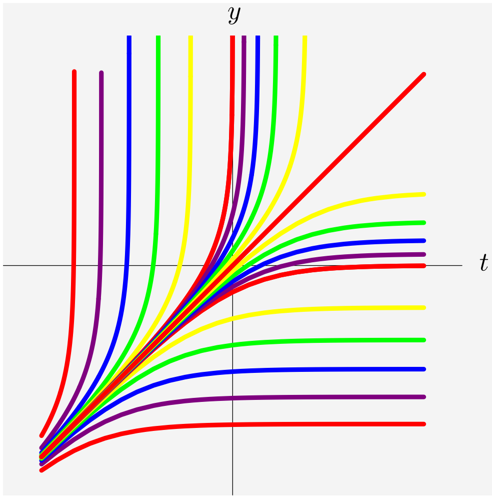
Esboço do gráfico de $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{15}(-1)^{k-1}\frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right]}{2k-1}$.

4.

a)



Campo de direcções de $y' = e^{y-t}$.



Esboço das soluções de $y' = e^{y-t}$.

b) A equação é separável:

$$e^{-y}y' = e^{-t}.$$

Integrando ambos os membros entre 0 e t,

$$e^{-y(t)} - e^{-y_0} = e^{-t} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = -\log(e^{-y_0} + e^{-t} - 1).$$

Como se está a supor que $y_0 < 0$, tem-se $e^{-y_0} - 1 > 0$, pelo que a solução está definida em $\mathbb{R}$. Além disso,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\log(e^{-y_0} - 1).$$

O gráfico tem como assímptota o eixo dos t's se este limite for nulo. Isto corresponde a

$$-\log(e^{-y_0} - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-y_0} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = \log\frac{1}{2}.$$

c) A solução que passa no ponto $(t_0, 0)$ é

$$e^{-y(t)} - 1 = e^{-t} - e^{-t_0} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = -\log(e^{-t} - e^{-t_0} + 1).$$

Esta solução existe para

$$e^{-t} - e^{-t_0} + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t} > e^{-t_0} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t < -\log(e^{-t_0} - 1).$$

O intervalo máximo de existência da solução é $]-\infty, -\log(e^{-t_0} - 1)[$.
Observação: Se $t_0 = y_0$, então os gráficos das soluções das alíneas b) e c) são simétricos em relação à recta $y = t$. Isto é consequência da simetria da equação diferencial: $e^{-y}\,dy = e^{-t}\,dt$. É por isso claro que se na alínea b) obtivémos o valor $-\log(e^{-y_0} - 1)$, na alínea c) tínhamos que obter o valor $-\log(e^{-t_0} - 1)$.

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \overline{z}^2 = (x - iy)^2 = (x^2 - y^2) - 2ixy.$$

Então $f_x(z) = 2x - 2iy$ e $-if_y(z) = -i(-2y - 2ix) = -2x + 2iy$. A equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$, é satisfeita para $2x = -2x \ \wedge \ -2y = 2y$, ou seja apenas no ponto $z = 0$. Portanto, f apenas pode ser diferenciável na origem. Como f tem derivadas parciais contínuas, f é de facto diferenciável em zero e $f'(0) = f_x(0) = 0$.

6. *1ª resolução.* Seja $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$, para $r > 0$ e $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Então $\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$ para z não pertencente à parte positiva do eixo imaginário união com zero. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \log 1 - \log(-1) = -\log(1e^{-i\pi}) = i\pi.$$

2ª resolução. Como $z \mapsto \frac{1}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, o Teorema de Cauchy aplicado à região $\mathbb{C} \setminus \{iy : \ y \in \mathbb{R}_0^+\}$ garante que podemos substituir o arco γ pela semi-circunferência de raio 1 centrada na origem no semiplano $\Im z \leq 0$. Esta semi-circunferência pode ser parametrizada por $e^{i\theta}$ com $\theta \in [-\pi, 0]$. Por cálculo directo,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}\, d\theta = i\pi.$$

7. Sabemos que

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

para $z \in \mathbb{C}$, logo

$$\frac{\sin z - z}{z^6} = -\frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} - \frac{z^3}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n+1)!}$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Logo, zero é um pólo de ordem 3 da função com resíduo $1/5!$. A função não tem nenhuma outra singularidade para além de zero.

8. Seja $f : \mathbb{C}\setminus\{-i, i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}, \text{ com } g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Seja $R > 1$ e γ um contorno fechado formado pela união do segmento de recta que une $-R$ e R com a semi-circunferência centrada na origem no semiplano superior, descrita no sentido directo. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i g'(i) = 2\pi i \left[-\frac{2}{(z+i)^3}\right]_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

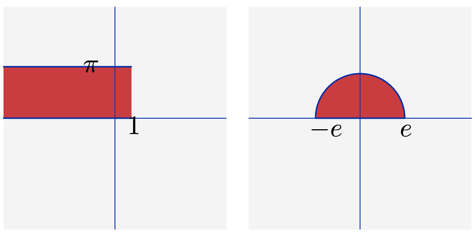
$$\frac{\pi}{2} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

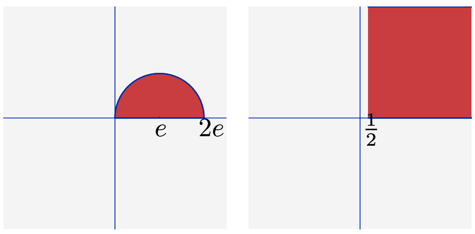
$$\begin{aligned} \left|\int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} \frac{1}{(R^2-1)^2}|dz| \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

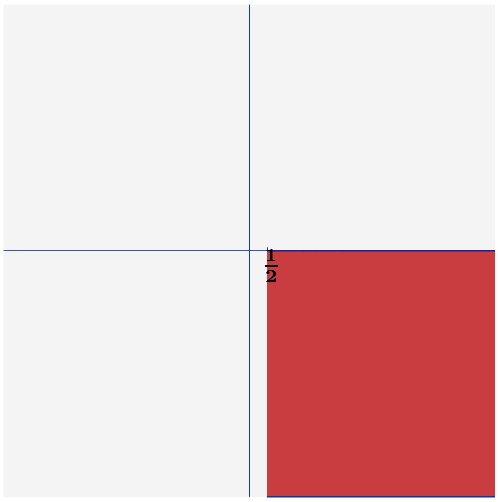
9.



Os planos z e e^z.



Os planos $e^z + e$ e $\overline{\frac{e}{e^z+e}}$.



O plano $\frac{e}{e^z+e}$.

10. Se f é inteira e tem parte real majorada, digamos por M, então e^f é inteira e limitada: $|e^f| \leq e^M$. Pelo Teorema de Louville e^f é constante, digamos $e^f = c$. Logo, $f(z) = \log c + 2k\pi i$, onde $k = k(z) \in \mathbb{Z}$. Como f é contínua, f é constante.