Análise Matemática IV

1º Teste - 29 de Outubro de 2005

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

Resolução

1.

a) Seja $z = re^{i\theta}$.

$$\{\sqrt[3]{z}\} = \{\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}, \sqrt[3]{r}e^{i(\theta/3+2\pi/3)}, \sqrt[3]{r}e^{i(\theta/3+4\pi/3)}\},$$

$$\begin{aligned} \{(\sqrt[3]{z})^2\} &= \{\sqrt[3]{r^2}e^{i2\theta/3}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+4\pi/3)}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+8\pi/3)}\} \\ &= \{\sqrt[3]{r^2}e^{i2\theta/3}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+4\pi/3)}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+2\pi/3)}\}, \end{aligned}$$

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta},$$

$$\{\sqrt[3]{z^2}\} = \{\sqrt[3]{r^2}e^{i2\theta/3}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+2\pi/3)}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+4\pi/3)}\}.$$

Portanto, $\{(\sqrt[3]{z})^2\} = \{\sqrt[3]{z^2}\}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.

b) A função f tem derivadas parciais contínuas em ordem a r e θ em $S := \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0 \text{ e } -\pi < \theta < \pi\}$. É descontínua em $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0 \text{ e } \theta = \pi\}$, porque quando z cruza o eixo real negativo, no sentido directo, o seu argumento principal salta de -2π, e consequentemente o argumento de $f(z)$ salta de $-4\pi/3$. Assim, basta provar que f satisfaz a equação de Cauchy-Riemann em S para provar a sua diferenciabilidade em S.

$$\begin{aligned} f_r(re^{i\theta}) &= \frac{2}{3}r^{-1/3}e^{2i\theta/3} \\ f_\theta(re^{i\theta}) &= \frac{2}{3}ir^{2/3}e^{2i\theta/3} \end{aligned}$$

Estas igualdades implicam que $f_r(re^{i\theta}) = -\frac{i}{r}f_\theta(re^{i\theta})$ em S. Conclui-se que f é diferenciável em S. Tem-se

$$f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta}f_r(re^{i\theta}) = \frac{2}{3}r^{-1/3}e^{-i\theta/3},$$

ou seja, $f'(z) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{z}}$, com $\sqrt[3]{re^{i\theta}} = r^{1/3}e^{i\theta/3}$ para $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. Por outro lado, f não é diferenciável no complementar de S, porque não tem derivada parcial em ordem a r em zero, e porque é descontínua no eixo real negativo.

c) Uma representação paramétrica é dada por $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, definida por $\gamma(t) = (1-t) + ti$.

d) $\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2}{3}\frac{(-1+i)}{\sqrt[3]{(1-t)+ti}}\,dt$.

e) $\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(\gamma(t))]dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(i) - f(1) = (e^{i\pi/2})^{2/3} - (e^{i0})^{2/3} = e^{i\pi/3} - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) O Teorema de Cauchy garante que $\int_{\hat{\gamma}} f(z)\,dz = 0$ para curvas fechadas $\hat{\gamma}$ que não cruzem o eixo real negativo ou zero, ou seja, para curvas em S (S como na resolução da alínea b)), porque f é holomorfa em S e S é simplesmente conexo.

2.

a) Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-3i, -i, i, 3i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+3i)(z-3i)}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{1}{z-i}g(z), \text{ com } g(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+9)}.$$

Sendo g holomorfa em torno de i, admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de i:

$$g(z) = g(i) + g'(i)(z-i) + \frac{1}{2!}g''(i)(z-i)^2 + \ldots,$$

para $|z-i| < 2$. Ora, $g(i) = -\frac{i}{16}$, pelo que

$$f(z) = \frac{-i/16}{z-i} + g'(i) + \frac{1}{2!}g''(i)(z-i) + \ldots,$$

para $0 < |z-i| < 2$. Do mesmo modo, tem-se

$$f(z) = \frac{1}{z-3i}h(z), \text{ com } h(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+3i)}.$$

Sendo h holomorfa em torno de $3i$, admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de $3i$:

$$h(z) = h(3i) + h'(3i)(z-3i) + \frac{1}{2!}h''(3i)(z-3i)^2 + \ldots,$$

para $|z-3i| < 2$. Ora, $h(3i) = \frac{i}{48}$, pelo que

$$f(z) = \frac{i/48}{z-3i} + h'(3i) + \frac{1}{2!}h''(3i)(z-3i) + \ldots,$$

para $0 < |z-3i| < 2$. Estas séries de Laurent mostram que f tem pólos simples i e $3i$, sendo $\text{Res}_{z=i} f(z) = -\frac{i}{16}$ e $\text{Res}_{z=3i} f(z) = \frac{i}{48}$. Claramente, a função f tem também pólos simples em $-i$ e $-3i$, não tendo mais nenhuma outra singularidade.

b) Seja $R > 3$ e γ um contorno fechado formado pela união do segmento de recta que une $-R$ e R com a semi-circunferência centrada na origem no semiplano superior descrita no sentido directo. Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=3i} f(z)\right) = 2\pi i\left(-\frac{i}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Logo,

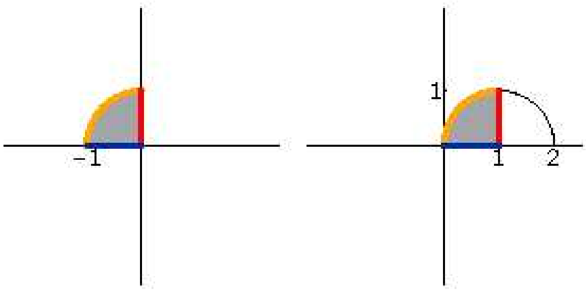
$$\frac{\pi}{12} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

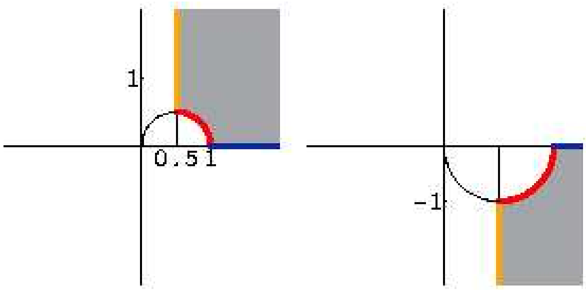
$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R\wedge \Im z>0} f(z)\,dz\right| &\le \int_{|z|=R\wedge \Im z>0} \frac{1}{(R^2-1)(R^2-9)}|dz| \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-9)} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty.\end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{12}$.

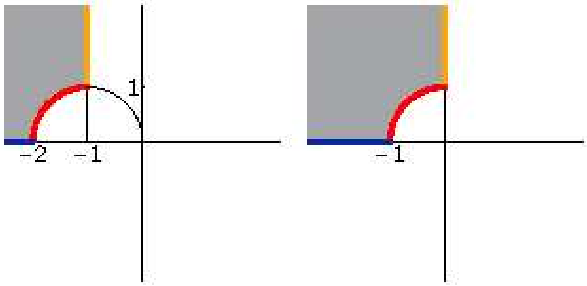
3. Tem-se $\frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$.



Os planos z e $z+1$.



Os planos $\frac{1}{z+1}$ e $\frac{2}{z+1}$.



Os planos $-\frac{2}{z+1}$ e $1-\frac{2}{z+1}$.

A imagem é $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \Re z < 0 \text{ e } \Im z > 0\}$.