Instituto Superior Técnico

1^{O} Teste de Matemática Computacional (versão a) - 06/11/2007

Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Computadores

Apresente todos os cálculos que efectuar

1. Considere a função $f(x) = e^x - (x+2)^2$. Sabe-se que existe um só número real z, localizado no intervalo $[3, 4]$, tal que $f(z) = 0$. Pretende-se aproximar z por um método iterativo da forma $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, ...$

   (a) No caso do método de Newton, qual a função iteradora g ? Prove que, se $x_0 \in [3, 4]$ fica garantida a convergência do método para z . **[1.5]**

   (b) Considere a função
   $$g(x) = 2\ Log[x+2] \qquad (1)$$

      i. Prove que a raiz z acima referida é ponto fixo da função g definida por (1). Recorrendo ao teorema do ponto fixo, mostre que a sucessão gerada por g converge para z, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 pertencente a $[3, 4]$. **[1.5]**

      ii. Determine, justificando, a ordem de convergência do método considerado na alínea anterior. Compare este método e o de Newton, estudado em a), no que respeita à ordem e rapidez de convergência. Justifique. **[2.0]**

2. Considere as matrizes:
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

   Sabe-se que estas matrizes formam uma factorização LU da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Identifique o tipo de factorização e determine as constantes a, b. **(1.0)**

   (b) Com base na factorização considerada, determine a solução do sistema $A\,x = v$, onde $v = (1, 15, 18)$ e calcule $Det A$. (Utilize os valores de a, b, c obtidos na alínea anterior. Caso não tenha resolvido a alínea anterior, escolha $a = -1, b = 2$). **(1.5)**

   (c) Seja $v = (0, 0, 1)$.Nas condições da alínea anterior, mostre que a fórmula iteradora do método de Gauss-Seidel para o sistema $Ax = v$ tem a forma $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, onde
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & -2/25 & 4/25 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

   (1.5)

(d) Baseando-se na alínea anterior, prove que o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema considerado. (**1.0**)